

Anomaler Hall-Effekt und Metall-Isolator-Übergang in zweidimensionalen InAs:Mn-Lochsystemen



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
der Fakultät für Physik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Dieter Vogel
aus
Satu Mare (RO)

im Jahr 2015

Die Arbeit wurde von Prof. Dr. Dieter Weiss angeleitet.
Das Promotionsgesuch wurde am 29.06.2015 eingereicht.
Das Promotionskolloquium fand am 18.04.2016 statt.

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Karsten Rincke
1. Gutachter:	Prof. Dr. Dieter Weiss
2. Gutachter:	Prof. Dr. Dominique Bougeard
weiterer Prüfer:	Prof. Dr. Sergey Ganichev

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Zweidimensionale Ladungsträgersysteme	5
2.1.1	Das Konzept der Löcher	6
2.1.2	Realisierung	6
2.1.3	Quantenmechanische Betrachtung	8
2.1.4	Magnetotransport und Quanteneffekte	11
2.2	Paramagnetismus in (In,Mn)As	16
2.2.1	Langevinscher Paramagnetismus und Brillouin-Funktion	18
2.2.2	Van Vleck'scher Paramagnetismus	20
2.2.3	Pauli-Paramagnetismus	21
2.3	Spin-Bahn-Kopplung in InAs	22
2.3.1	Einflüsse auf die Valenzbandstruktur	22
2.3.2	Inversions-Asymmetrie	23
2.4	Die s,p-d-Austauschwechselwirkung in DMS-Systemen	25
2.5	Metall-Isolator-Übergang und Lokalisierung	28
2.5.1	Widerstandsmodell des Hopping Transports	31
2.5.2	Magnetfeld-induzierter Metall-Isolator-Übergang	32
2.6	Der anomale Hall-Effekt	34
2.6.1	Theoretische Beschreibung	35
2.6.2	Leitfähigkeitsregime und Skalierung des AHE	42
3	Probenherstellung und Messtechnik	47
3.1	Ausgangsmaterial	48
3.1.1	Materialeigenschaften von InAs:Mn	48
3.1.2	Mn-dotierte InAs Quantenwellstrukturen	48
3.2	Probenpräparation	50
3.2.1	Strukturierung der Mesa	51
3.2.2	Ohmsche Kontakte	53
3.2.3	Topgate	54
3.2.4	Fertigstellung	56
3.3	Messtechnik	56
3.3.1	Kryostate	56
3.3.2	Messelektronik	59

4	Der Metall-Isolator-Übergang in InAs:Mn	61
4.1	Temperaturabhängige Messungen ohne externes Magnetfeld	61
4.1.1	Experimentelle Ergebnisse	62
4.1.2	Diskussion	69
4.2	Magnetfeldabhängige Messungen	72
4.2.1	Experimentelle Ergebnisse	72
4.2.2	Diskussion	75
4.3	Magnetfeld-induzierter Metall-Isolator-Übergang	82
4.3.1	Experimentelle Ergebnisse	82
4.3.2	Diskussion	85
4.4	Zusammenfassung des Kapitels	93
5	Der anomale Hall-Effekt in InAs:Mn	95
5.1	Der transversale Widerstand	96
5.2	Untersuchung des anomalen Hall-Widerstandes	98
5.3	Diskussion	104
5.3.1	Analyse der intrinsischen und extrinsischen Mechanismen . . .	104
5.3.2	Der Vorzeichenwechsel der anomalen Hall-Leitfähigkeit	110
5.3.3	Skalierung des AHE	114
5.4	Zusammenfassung des Kapitels	116
6	Zusammenfassung	119
A	Anhang	121

1 Einleitung

Mit der Vorstellung des ersten Bipolartransistors¹ [1] im Jahr 1947 begann das Zeitalter der modernen Elektronik. Darauf folgte eine rasante Entwicklung von Halbleiterbauelementen, die vom ersten tragbaren Transistorradio ([Abbildung 1.1](#)) durch die Realisierung von integrierten Schaltkreisen² (IC³) und Mikroprozessoren zu Hochleistungsrechnern im Hosentaschenformat führte. Das Mooresche Gesetz [2] bündelt die Evolution der Technik in einer einfachen Formel: Etwa alle 18 Monate verdoppelt sich die Transistordichte in einem integrierten Schaltkreis. Auch wenn dieser Trend momentan noch anhält, um das Jahr 2020 könnte damit Schluss sein [3]. Die immer weiter zunehmende Miniaturisierung, bei immer höherer Rechenleistung, führt bei der konventionellen Halbleitertechnologie vermehrt zu Problemen. Einerseits stellt die Verkleinerung der Strukturen immer höhere Anforderungen an die Lithographie-Technik und das Wärmemanagement, andererseits müssen zunehmend quantenmechanische Tunnelprozesse berücksichtigt werden. Es ist absehbar, dass die Entwicklung eines Tages an ihre physikalischen Grenzen stößt. Gesucht wird deshalb eine Nachfolgetechnologie. Ein vielversprechender Kandidat ist die Spintro-
nik.

Im Wesentlichen basiert die heutige Elektronik darauf, dass Elektronen durch Leiterbahnen und Dioden wandern, sich in Kondensatoren sammeln und Transistoren zwischen durchlässigem und undurchlässigem Zustand schalten. Die entscheidende

¹Nobelpreis 1956 für W. B. Shockley, J. Bardeen und W. H. Brattain.

²Nobelpreis 2000 für J. Kilby mit S. Alfjorow und H. Kroemer.

³Integrated circuit.



Abbildung 1.1 Werbeanzeige des ersten portablen Radios aus den 1950ern. Hergestellt von dem Unternehmen Regency unter Verwendung von Germanium-Transistoren der Firma Texas-Instruments (aus [4]).

physikalische Eigenschaft dafür ist die elektrische Ladung des Elektrons, die dafür sorgt, dass sich Ladungsträger in Bewegung setzen, wenn eine elektrische Spannung angelegt wird. Elektronen haben allerdings noch eine zweite Eigenschaft - den Spin. Um die Nutzung dieses zusätzlichen Freiheitsgrades, der in der konventionellen Elektronik vernachlässigt wird, geht es bei der Spintronik [5, 6]. Der Spin ist der Eigendrehimpuls des Elektrons, mit dem ein magnetisches Moment verknüpft ist. Da grundsätzlich nur zwei elementare Spinrichtungen möglich sind⁴, liegt es nahe diese als binäre Informationsträger zu verwenden. Als Geburtsstunde der Spintronik gilt Vielen dabei die Entdeckung des Riesenmagnetowiderstandes⁵ (GMR⁶) [8, 9] im Jahr 1988. Der Effekt wird in Strukturen beobachtet, die aus abwechselnden, einigen Nanometer-dicken, ferromagnetischen und nichtmagnetischen Schichten bestehen. Aufgrund der spinabhängigen Streuung der Elektronen an Grenzflächen weisen solche Proben bei paralleler Magnetisierung aller ferromagnetischer Schichten einen wesentlich geringeren Widerstand auf, als bei stets wechselnder Orientierung. Da sich dieser Spin-Effekt als äußerst robust erwiesen hat, konnte er bereits nach wenigen Jahren den Massenmarkt in Form neuartiger Festplattenleseköpfe erobern, was zu einer drastischen Steigerung der Speicherdichte auf Festplattenlaufwerken führte. Dieser Erfolg regte eine intensive Forschungstätigkeit auf diesem Gebiet an. Und obwohl zunächst ferromagnetische Metalle im Fokus standen, erschien es, durch die Dominanz von Halbleitern in der modernen Elektronikindustrie, logisch die Eigenschaften beider Materialklassen für neue spin-elektronische Anwendungen zu kombinieren. Das rückte die Klasse der verdünnt-magnetischen Halbleiter (DMS⁷) in den Mittelpunkt des Interesses. Hierbei handelt es sich um Halbleiter, bei denen ein Teil der Wirtsatome statistisch durch Übergangsmetalle ersetzt wird.

Geschichtlich gesehen wurden verdünnt-magnetische Halbleiter bereits in den frühen 70ern realisiert [10]. Sie basierten zumeist auf II-VI-Verbindungshalbleitern, die den Vorteil hatten, dass die Valenz der Kationen aus der Hauptgruppe II denen der meisten magnetischen Ionen, wie Mangan (Mn) oder Kobalt (Co), entsprach. Das machte die Herstellung besonders einfach. Allerdings wird die magnetische Wechselwirkung in solchen Systemen vom antiferromagnetischem Austausch der Mn-Ionen dominiert, was zu paramagnetischem, spin-glas und langreichweitigem antiferromagnetischem Verhalten führt [11]. Zudem war es schwierig durch Dotierung p- oder n-Typ-Material herzustellen, was den anwendungsorientierten Einsatz weniger attraktiv machte [12]. Ein vielversprechender Ansatz war daher die magnetische Dotierung von III-V-Verbindungshalbleitern, wie beispielsweise Galliumarsenid (GaAs) oder Indiumarsenid (InAs). Solche Halbleiter werden in der Elektronikindustrie bereits auf breiter Front in Form von Mikrowellentransistoren in Mobiltelefonen, Halbleiterlasern in CD-Spielern und vielen weiteren elektronischen und optoelektronischen

⁴In einer vereinfachten Darstellung kann jeder Spin als kleiner Magnet betrachtet werden und kann aufgrund seiner Polarität [7] im Magnetfeld ausgerichtet werden.

⁵Nobelpreis 2007 für P. Grünberg und A. Fert.

⁶Giant magnetoresistance.

⁷Dilute magnetic semiconductor.

Bauteilen eingesetzt [12]. Dadurch sind neu entwickelte spinsensitive Bauelemente prinzipiell kompatibel mit bereits etablierter Halbleitertechnologie. Der große Durchbruch bei III-V-DMS gelang im Jahr 1992 mit der Entdeckung langreichweitiger ferromagnetischer Ordnung zunächst in (In,Mn)As [13] und in der Folge in (Ga,Mn)As [14]. Da in III-V-Halbleitern die ferromagnetische Ordnung über die freien Ladungsträger vermittelt wird [15, 16], ist zudem eine rein elektrische Kontrolle der magnetischen Eigenschaften über ein von außen angelegtes elektrisches Feld möglich [17]. Die Herausforderung besteht gegenwärtig allerdings darin, die ferromagnetische Ordnung bis in den Bereich der Raumtemperatur hinein zu erhalten, was nach aktueller Anschauung zumindest theoretisch möglich ist [18].

Darüber hinaus haben sich verdünnt-magnetische Halbleiter als unschätzbares Modellsystem für grundlegende Untersuchungen des spinabhängigen elektrischen Transports erwiesen. Insbesondere die s,p-d-Austauschwechselwirkung (Abschnitt 2.4) beeinflusst im erheblichen Maße das Transportverhalten in DMS, was beispielsweise zum extrem ausgeprägten Magnetowiderstand, magnetfeld-induziertem Metall-Isolator-Übergang und der Bildung von gebundenen magnetischen Polaronen führt (Abschnitt 2.5 und Kapitel 4). Zugleich ist in verdünnt-magnetischen Halbleitern die Realisierung von magnetisch-dotierten zweidimensionalen Ladungsträgersystemen möglich, in denen das Zusammenspiel zwischen Quantentransport, Lokalisierung und Elektron-Elektron-Wechselwirkung untersucht werden kann [19]. Aufgrund der Fülle an denkbaren DMS-Systemen und Einflussfaktoren sind Untersuchungen auf diesem Gebiet auch in Zukunft interessant. Nicht zuletzt bieten DMS eine wertvolle Gelegenheit den immer noch unvollständig verstandenen anomalen Hall-Effekt (Abschnitt 2.6 und Kapitel 5) noch tiefer zu ergründen.

Der anomale Hall-Effekt (AHE) ist ein fundamentaler Aspekt magnetischer Materialien, dessen Entdeckung auf die Untersuchungen stromdurchflossener Leiter unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes durch Edwin Herbert Hall zurückgeht. Ursprünglich bezog Hall die Motivation für seine Untersuchung aus einer Bemerkung von James Maxwell, nach der der Weg des elektrischen Stromes durch einen Leiter durch die Anwesenheit eines Magnetfeldes nicht auf Dauer verändert wird. Vielmehr fließt der Strom, nach kurzfristig auftretenden Induktionsströmen, unverändert weiter [20]. Hall bezweifelte diese Aussage und konnte im Jahr 1879 [21] durch seine Experimente an Gold und Silber belegen, dass unter dem Einfluss eines externen Magnetfeldes eine elektromotorische Kraft entsteht, die sowohl senkrecht zum Strom, als auch zum Magnetfeld gerichtet ist und zu einer Transversalspannung führt, die zu seinen Ehren Hall-Spannung genannt wird. In nichtmagnetischen Materialien ist die Hall-Spannung dabei proportional zum Magnetfeld B und entsteht aufgrund der Lorentz-Kraft. Allerdings beobachtete Hall in ferromagnetischen Materialien wie Eisen neben dem Lorentz-Term eine zusätzliche Spannung, die proportional zur Magnetisierung war [22]. Wobei dieser zusätzliche Beitrag so groß war, um es lediglich auf das interne Magnetfeld zurückzuführen. Diese Entdeckung wurde als anomaler Hall-Effekt bekannt. Die Erklärung der Ursachen, die zu diesem Verhalten führen, sind ungleich komplexer. Ein erstes theoretisches Modell zur Beschreibung des AHE wurde

erst 73 Jahre später, im Jahr 1954 vorgeschlagen [23]. Seitdem wurden in zahlreichen Veröffentlichungen neue Erklärungsansätze vorgestellt, Fehler korrigiert, Ungereimtheiten gelöst und neue aufgedeckt. Allgemein akzeptiert ist die Ansicht, dass sich der AHE aus einem intrinsischen Beitrag, der im Bilde der Berry-Phasen-Theorie beschrieben werden kann, und einem extrinsischen Beitrag aufgrund der spinabhängigen Streuung der Ladungsträger an magnetischen Störstellen zusammensetzt [24]. In jüngerer Zeit wurde die Forschungstätigkeit auf diesem Feld neu belebt - einerseits durch das gestiegene Interesse am spinabhängigem Transport im Rahmen der Spintronik, andererseits durch neue topologische und geometrische Konzepte, die theoretischen Überlegungen neue Impulse gaben. Daneben ist der Quanten-Hall-Effekt⁸ (QHE) [25] eine weitere wichtige Entdeckung auf diesem Gebiet. Hierbei handelt es sich um einen stufenförmigen (quantisierten) Anstieg der Hall-Spannung, der in zweidimensionalen Ladungsträgersystemen bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern auftritt. Da sich die Quantisierung auf elementare Naturkonstanten zurückführen lässt, wird der QHE nach internationaler Übereinkunft zur Definition des elektrischen Widerstandes herangezogen. Daneben sind eine Vielzahl weiterer Ausprägungen des Hall-Effektes bekannt, wie beispielsweise planarer Hall-Effekt (PHE) [26], fraktionaler Quanten-Hall-Effekt⁹ (FQHE) [27], Spin-Hall-Effekt (SHE) [28], Hall-Effekt des Lichts [29], Valley-Hall-Effekt (VHE) [30], Quanten-Spin-Hall-Effekt (QSHE) [31] und Quanten-Anomaler-Hall-Effekt (QAHE) [32].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem anomalen Hall-Effekt und dem Metall-Isolator-Übergang in dem zweidimensionalen, magnetisch Mn-dotiertem Ladungsträgersystem InAs:Mn. Ziel der Untersuchungen ist, durch systematische Messungen die Grundlagen für ein tieferes Verständnis beider Effekte im Kontext niedrigdimensionalen Transports zu schaffen und dabei den Einfluss eines magnetfeld-induzierten Metall-Isolator-Übergang auf den anomalen Hall-Effekt zu beleuchten. Die Arbeit gliedert sich dabei wie folgt: In [Kapitel 2](#) werden die theoretischen Grundlagen des betrachteten Ladungsträgersystems und der untersuchten physikalischen Effekte gelegt. Besondere Beachtung finden dabei die Abschnitte zum Metall-Isolator-Übergang und anomalen Hall-Effekt. In [Kapitel 3](#) werden Aufbau und wichtige Eigenschaften der untersuchten Heterostruktur diskutiert und Methoden der Probenpräparation und der Transportuntersuchungen ausführlich dargestellt. In [Kapitel 4](#) wird die Ausprägung der starken Lokalisierung und der Metall-Isolator-Übergang in unterschiedlich stark dotiertem InAs:Mn untersucht. Insbesondere der magnetfeld-induzierte Phasenübergang steht dabei im Fokus der Betrachtungen. [Kapitel 5](#) beschäftigt sich mit der ausführlichen Diskussion des anomalen Hall-Effektes in InAs:Mn als Funktion der Mn-Konzentration, Temperatur und des elektrischen Feldes eines Topgates. Abschließend werden in [Kapitel 6](#) die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Im [Anhang A](#) befinden sich weiterführende Erläuterungen und detaillierte Informationen zu Prozessparametern der Probenherstellung.

⁸Nobelpreis 1985 für K. von Klitzing.

⁹Nobelpreis 1998 für H. L. Störmer, D. Tsui gemeinsam mit R. B. Laughlin.

2 Theoretische Grundlagen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Metall-Isolator-Übergang und der anomale Hall-Effekt in Mangan(Mn)-dotierten Indiumarsenid(InAs)-Quantentrögen untersucht. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über alle notwendigen Grundlagen zum Verständnis der experimentellen Daten und deren Analyse. Der [Abschnitt 2.1](#) gibt eine kurze Einführung in die Realisierung und Transportcharakteristika zweidimensionaler Systeme. Im [Abschnitt 2.2](#) folgt ein Überblick über die nötigen Grundlagen des im untersuchten System vorliegenden Paramagnetismus. Eine wichtige Eigenschaft verdünnt-magnetischer Halbleiter ist die s,p-d-Austauschwechselwirkung aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung, auf die im [Abschnitt 2.3](#) und [2.4](#) eingegangen wird. Dabei werden auch Besonderheiten von Lochsystemen behandelt. Der [Abschnitt 2.5](#) erörtert den Effekt der starken Lokalisierung und des Metall-Isolator-Übergangs. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Temperaturabhängigkeit stark-lokalisierter Systeme im Anderson-Mott-Regime und der Darstellung des magnetfeld-induzierten Metall-Isolator-Übergangs aufgrund der s,p-d-Austauschwechselwirkung. Zuletzt gibt [Abschnitt 2.6](#) eine kurze Übersicht über die komplexe Theorie des anomalen Hall-Effekts mit besonderem Fokus auf der Kategorisierung der zugrundeliegenden Mechanismen und ihren Einfluss auf das Skalierungsverhalten des Effekts.

2.1 Zweidimensionale Ladungsträgersysteme

In zweidimensionalen Ladungsträgersystemen können sich freie Ladungsträger effektiv nur in zwei Dimensionen bewegen. In solchen Systemen treten einige interessante Effekte, wie beispielsweise der Quanten-Hall-Effekt (QHE) auf. Die Ladungsträger liegen dabei als zweidimensionales Elektronengas (2DEG¹) oder als zweidimensionales Lochgas (2DHG²) vor. Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Material weist ausschließlich Löcher als Ladungsträger auf. Daher wird zunächst das Konzept der Löcher eingeführt. Im Anschluss folgt die Darstellung der Realisierungsmöglichkeiten und die Betrachtung des zweidimensionalen Ladungsträgertransports unter dem Einfluss externer magnetischer Felder (Magnetotransport). Eine allgemeine Einführung und tiefer gehende Betrachtung findet sich in der einschlägigen Literatur [[33–36](#)], an der sich auch diese Beschreibung orientiert.

¹Two-dimensional electron gas.

²Two-dimensional hole gas.

2.1.1 Das Konzept der Löcher

Beim Übergang eines Elektrons aus dem vollständig gefüllten Valenzband in das leere Leitungsband fehlt ein Elektron im Zustand k_e und es entsteht ein Loch. Je tiefer das Loch im Valenzband sitzt, desto höher ist die Gesamtenergie der im Valenzband verbliebenen Elektronen. Diese Energie wird ebenso wie der Gesamtwellenvektor dem Loch zugeordnet und ist dem fehlenden Elektron entgegengesetzt. Es gilt:

$$\vec{k}_h = -\vec{k}_e \quad (2.1)$$

$$E_h(\vec{k}_h) = -E_e(-\vec{k}_e) . \quad (2.2)$$

Analog gilt für die effektive Masse m^* :

$$m_h^* = -m_e^* , \quad (2.3)$$

das heißt, das Loch verhält sich wie ein Teilchen mit positiver Ladung und erlaubt somit die Anwendung sämtlicher Modelle und Methoden für Elektronen. Dies führt zu der in [Abbildung 2.1](#) gezeigten Darstellung des Valenzbandes im Elektronen- und Lochbild.

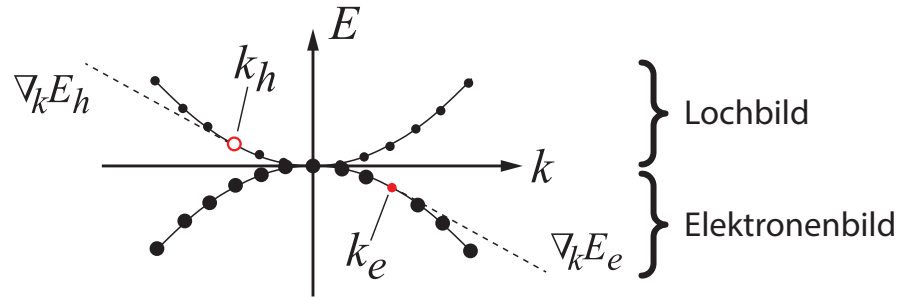


Abbildung 2.1 Darstellung desselben Valenzbandextremums im Elektronen- und Lochbild (aus [34]).

2.1.2 Realisierung

Die Entwicklung des Si-MOSFETs³ in den frühen 60er Jahren des letzten Jahrhunderts markiert den Beginn der Forschung an zweidimensionalen Ladungsträgersystemen. Etabliert hat sich allerdings die Realisierung mittels Halbleiter-Heterostrukturen, d. h. durch die Schichtfolgen verschiedener Halbleitermaterialien mit identischer Kristallstruktur aber unterschiedlicher Bandlücke. Gut geeignet sind III-V- und II-VI-Heterostrukturen mit gleicher oder sehr ähnlicher Gitterkonstante, wie zum Beispiel die in dieser Arbeit untersuchten $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{In}_x\text{Al}_{1-x}\text{As}$ -Strukturen⁴.

³Metal-oxide-semiconductor field-effect transistor.

⁴Eine genaue Beschreibung des Materials findet sich in [Abschnitt 3.1](#).

$\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ist ein GaAs-Verbindungshalbleiter, bei dem der Anteil x der Ga-Atome durch In-Atome substituiert wird. Mit steigendem x verringert sich die Bandlücke E_g . Das gleiche Prinzip findet auch bei anderen Verbindungshalbleitern Anwendung, wodurch verschiedene Potentiallandschaften gestaltet werden können [37].

Für die Realisierung von zweidimensionalen Lochgasen sind Einschlusspotentiale notwendig. Die Bandanpassung an Schichtgrenzen von Halbleitern mit unterschiedlicher Bandlücke und variierender Dotierung ist eine Möglichkeit solche Potentialverläufe zu verwirklichen. Löcher der p-dotierten Schicht fließen dabei zu Schichten mit einer geringeren Bandlücke. Dieser Ladungsaustausch verzerrt Valenz- und Leitungsbänder, wodurch ein dreieckförmiger Potentialtopf entsteht, der die Löcher in der Grenzschicht „einsperrt“ (Abbildung 2.2(a)). Es bilden sich quantisierte Energieniveaus E_i senkrecht zum Einschlusspotential aus. Eine räumliche Trennung der Dotierung vom Einschlusspotential, die sogenannte Modulationsdotierung⁵, verringert die Coulomb-Streuung an geladenen Störstellen und erhöht die mittlere freie Weglänge und Mobilität der Ladungsträger.

Ein kastenförmiges Einschlusspotential wird als Potential- oder Quantentopf (QW⁶) bezeichnet. Dieses wird durch eine zweite Grenzschicht realisiert, wodurch sich ein symmetrisches Einschlusspotential ergibt. Solche Strukturen können einseitig (Abbildung 2.2(b)) oder beidseitig (Abbildung 2.2(c)) dotiert werden.

Das Aufbringen eines metallischen Topgates ermöglicht das gezielte Anheben oder Absenken der Fermi-Energie durch das elektrische Feld in der Probe. Dadurch kann die Potentialsenke mit Ladungsträgern entsprechend angereichert oder verarmt werden. Bei diesem Vorgang zeigen sich die Vorteile eines kastenförmigen Einschlusspotentials. Das elektrische Feld beeinflusst den Bandverlauf nur geringfügig, die Quantentrogbreite bleibt bestehen und die Potentialhöhe wird nur minimal verändert. Lediglich die Symmetrie des Einschlusspotentials wird gestört [38].

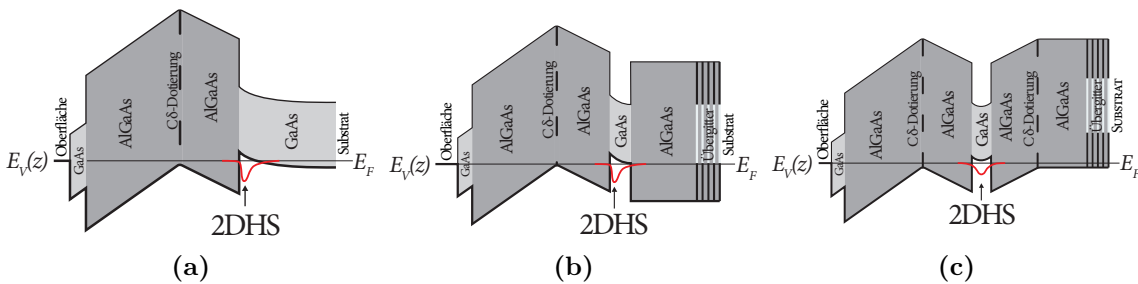


Abbildung 2.2 Bandstrukturen von p-dotierten GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen: (a) einseitig modulationsdotierter Übergang, (b) einseitig modulationsdotierte QW-Struktur, (c) beidseitig modulationsdotierte QW-Struktur (aus [38]).

⁵Auf Englisch auch als „remote-doping“ bezeichnet.

⁶Quantum well.

2.1.3 Quantenmechanische Betrachtung

In der einschlägigen Literatur wird üblicherweise ein zweidimensionales Elektronengas betrachtet. Die beschriebenen Konzepte und Modelle können analog auch auf 2D-Lochsysteme angewendet werden. Es wird von einem 2DEG in der x-y-Richtung ausgegangen. Die folgende Darstellung orientiert sich an [36].

In der Quantenmechanik nehmen Ladungsträger in einem Potentialtopf diskrete Energieniveaus E_i in z-Richtung ein. Dem periodischen Gitterpotential im Halbleiter wird durch die Einführung der effektiven Masse m^* , welche die freie Elektronenmasse m_e ersetzt, Rechnung getragen. Die Gesamtenergie lautet:

$$E(i, k_x, k_y) = E_i + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Hierbei sind k_x und k_y die Komponenten des Wellenvektors in x- und y-Richtung. Lage und Abstand der Energieniveaus hängen von der genauen Form des Potentialtopfes ab. Bei genügend tiefer Temperatur ist die thermische Energie $k_B T$ kleiner als die Energiedifferenz zwischen zwei Niveaus und es ist nur das unterste Energiesubband besetzt. In diesem Fall wird von einem 2DEG gesprochen. In einem 2D-System ist die Zustandsdichte $D_i(E)$ eines Subbandes i energieunabhängig und konstant (Abbildung 2.3):

$$D_i(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} = \text{const.} \quad (2.5)$$

Zwischen der Ladungsträgerdichte⁷ n_s und dem Fermi-Wellenvektor k_F , lässt sich durch Abzählen der besetzten Zustände im k-Raum ein Zusammenhang herleiten. Unter der Annahme periodischer Randbedingungen und der Tatsache, dass bei $T = 0\text{ K}$ lediglich Zustände innerhalb des Fermi-Kreises besetzt sind, ergibt sich:

$$k_F = \sqrt{2\pi n_s}. \quad (2.6)$$

Das 2DEG in einem externen Magnetfeld

Die Bewegung der Ladungsträger eines 2DEG in einem externen Magnetfeld wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\left(\frac{1}{2m^*} (\vec{p} + e\vec{A})^2 + U(y) \right) \Psi = E\Psi. \quad (2.7)$$

Die beschränkte Bewegungsfreiheit der Ladungsträger wird durch das Randpotential $U(y)$ berücksichtigt, das äußere Magnetfeld durch das Vektorpotential $\vec{A} =$

⁷Für die Löcherdichte ist p_s üblich.

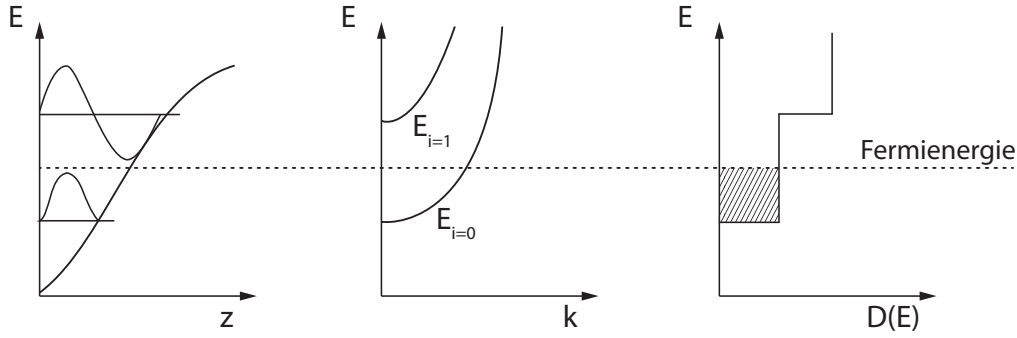


Abbildung 2.3 Schema der Energieniveaus mit eingezeichneter Wellenfunktion in einem dreieckförmigen Potentialtopf, der Subbänder im k-Raum und der Zustandsdichte. Ist nur das unterste Subband besetzt, spricht man von einem 2DEG.

$(-By, 0, 0)$. Als Energienullpunkt wird das unterste Subband $E_{i=0}$ betrachtet. Wird das Randpotential vernachlässigt, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\frac{1}{2m^*} \left((p_x + eBy)^2 + p_y^2 \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y) . \quad (2.8)$$

Mit dem Separationsansatz

$$\Psi(x, y) = \phi(x) \chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \chi(y) \quad (2.9)$$

und den Substitutionen $eB/m^* = \omega_c$ (Zyklotronfrequenz) und $\hbar k_x / eB = y_k$ (Zentrumsordinate) lässt sich die Gleichung überführen in:

$$\left(\frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_c (y + y_k)^2 \right) \chi(y) = E \chi(y) . \quad (2.10)$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators, der auf der y-Achse um die Zentrumsordinate y_k vom Nullpunkt verschoben ist. Die quantisierten Energieeigenwerte, auch Landau-Niveaus genannt, betragen:

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c , \quad n = 0, 1, 2, \dots . \quad (2.11)$$

Durch Berücksichtigung der Spinaufspaltung der Landau-Niveaus im Magnetfeld ergibt sich für die Gesamtenergie:

$$E = E_i + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + s g_{eff} \mu_B B . \quad (2.12)$$

Der effektive Landé-Faktor g_{eff} berücksichtigt den Zeeman-Effekt, die Spin-Bahn-

und die s,p-d-Wechselwirkung (siehe auch [Abschnitt 2.4](#)); $s = \pm 1/2$ ist die Spinquantenzahl und μ_B das Bohrsche Magneton.

Aus [Gleichung 2.12](#) folgt, dass durch Anlegen eines externen Magnetfeldes die konstante Zustandsdichte des tiefsten Energiesubbandes in eine Reihe von δ -Peaks mit dem Abstand $\hbar\omega_c$ aufspaltet. Die Zustände kondensieren im \vec{k} -Raum auf konzentrischen Kreisen ([Abbildung 2.4](#)), die Landau-Niveaus sind entartet. Mit dem Spinentartungsfaktor g_s und der Zustandsdichte D_0 des untersten Subbandes lässt sich die Ladungsträgerdichte pro Landau-Niveau angeben:

$$n_L(B) = g_s D_0 \hbar\omega_c = g_s \frac{eB}{h} . \quad (2.13)$$

Die Anzahl der gefüllten Landau-Niveaus gibt der sogenannte Füllfaktor ν an:

$$\nu = \frac{n_s}{n_L} = \frac{n_s h}{eB} . \quad (2.14)$$

Bei spinentarteten Systemen treten nur geradzahlige Füllfaktoren auf. Die Spinentartung kann durch hohe Magnetfelder aufgehoben werden ($g_s = 1$).

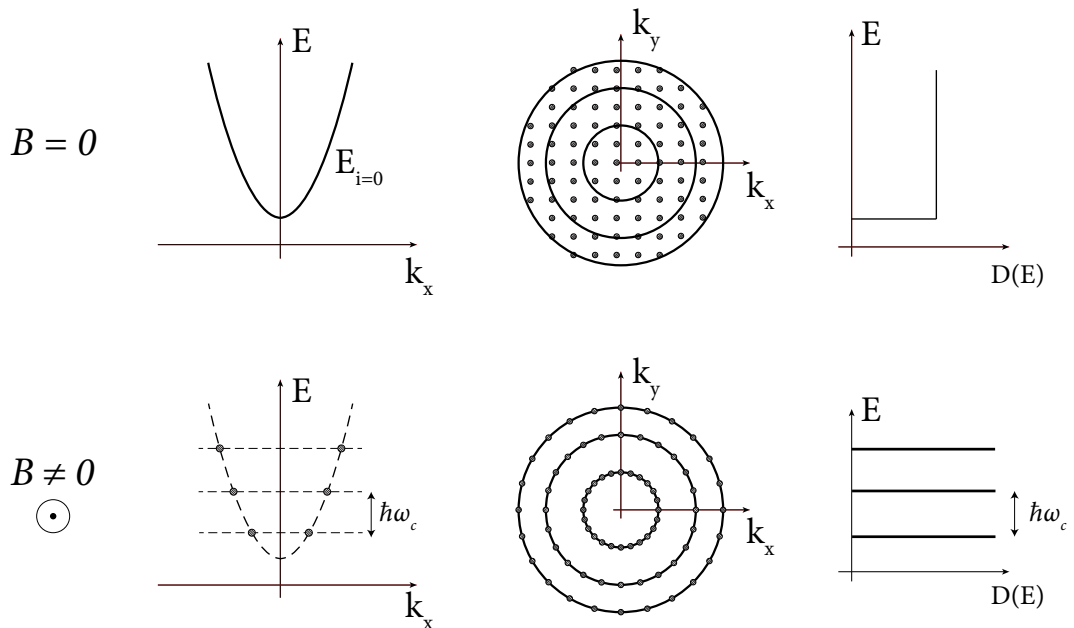


Abbildung 2.4 $B = 0$: Die Energieverteilung des untersten Subbandes ist kontinuierlich. Die Zustände liegen gleichverteilt im \vec{k} -Raum und die Zustandsdichte ist konstant. $B \neq 0$: Die Zustände nehmen diskrete Energieniveaus (Energiewerte der Landau-Niveaus) an, im \vec{k} -Raum kondensieren sie auf konzentrischen Kreisen und die Zustandsdichte spaltet in diskrete Landau-Niveaus auf. Der Entartungsgrad der Niveaus entspricht der Anzahl der Zustände auf den Kreislinien.

2.1.4 Magnetotransport und Quanteneffekte

Bei Ladungsträgertransport in einem externen Magnetfeld ist die Lorentz-Kraft dafür verantwortlich, dass der Strom nicht mehr entlang des angelegten elektrischen Feldes fließt. Für die Leitfähigkeit σ muss daher ein zweidimensionaler Tensor betrachtet werden. Für die gesamte Stromdichte \vec{j} gilt:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \text{mit} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Als Inverses des Leitfähigkeitstensors ergibt sich der Widerstandstensor:

$$\rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Nach der Onsager-Relation [39] gilt in isotropen Systemen:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} \quad \text{und} \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}. \quad (2.17)$$

Daraus folgt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Die Komponenten des Widerstandstensors lassen sich, unter Berücksichtigung der Probengeometrie, wie folgt angeben:

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} \quad (\text{Längswiderstand}) \quad (2.19)$$

$$\rho_{xy} = \frac{U_{xy}}{I} \quad (\text{Hall-Widerstand}), \quad (2.20)$$

wobei W die Breite des Strompfades, L der Abstand der Spannungsabgriffe, I der Strom, U_{xx} die Längs- und U_{xy} die Hall-Spannung ist.

Magnetotransport bei kleinen Magnetfeldern

Der Ladungsträgertransport in 2D bei schwachen Magnetfeldern bis etwa 1 T weist zumeist noch keine Quanteneffekte auf und kann mit dem Drude-Modell beschrieben werden. Hierbei werden die Elektronen als Teilchen betrachtet, die nach einer mittleren Stoßzeit τ gestreut werden. Beim Anlegen eines elektrischen Feldes \vec{E} bewegen sich die Elektronen zwischen zwei Stößen entlang der Feldrichtung. Aus der

mittleren Stoßzeit und dem elektrischen Feld ergibt sich die Driftgeschwindigkeit v_D zu

$$\vec{v}_D = \frac{e\tau}{m^*} \vec{E} = \mu \vec{E} , \quad (2.21)$$

mit der Mobilität μ

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} . \quad (2.22)$$

Aus dem Modell folgt die Bewegungsgleichung mit dem Reibungsterm $m^* \cdot \vec{v}/\tau$:

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} + m^* \frac{\vec{v}}{\tau} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (2.23)$$

Bei $d\vec{v}/dt = 0$ ergeben sich aus der Bewegungsgleichung die Komponenten des Widerstandstensors:

$$\rho_{xx} = \frac{m^*}{n_s e^2 \tau} = \frac{1}{n_s e \mu} = \text{const.} \quad (2.24)$$

$$\rho_{xy} = -\frac{B}{n_s e} \propto -B . \quad (2.25)$$

Aus den bisherigen Überlegungen ergeben sich experimentell zugängliche Ausdrücke für die Ladungsträgerdichte n_s und die Mobilität μ :

$$n_s = \frac{dB}{dU_{xy}} \cdot \frac{I}{e} = (\text{Steigung der Hallgeraden} \cdot e)^{-1} \quad (2.26)$$

$$\mu = \frac{I}{n_s e U_{xx}} \cdot \frac{L}{W} = \frac{\text{Steigung der Hallgeraden}}{\text{Nullfeldwiderstand}} \cdot \frac{L}{W} . \quad (2.27)$$

Magnetotransport im Bereich starker Magnetfelder

Mit zunehmender Magnetfeldstärke verliert das klassische Drude-Modell seine Gültigkeit. Der Hall-Widerstand ist als Funktion des Magnetfeldes nicht mehr linear, es bilden sich waagrechte Plateaus, die unabhängig von Material und Probengeometrie bei quantisierten Widerstandswerten auftreten:

$$R_{xy} = \frac{h}{e^2} \cdot \frac{1}{\nu} = 255812,8 \, \Omega \cdot \frac{1}{\nu} , \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Dieses Phänomen ist als Quanten-Hall-Effekt (QHE) bekannt. Gleichzeitig bildet der Längswiderstand periodische Oszillationen aus, deren Widerstandsminima mit den

Hall-Plateaus zusammenfallen (Abbildung 2.5). Dies sind die sogenannten Shubnikov-de-Haas-Oszillationen (SdH-Oszillationen). Das Auftreten dieser Effekte wird durch das Randkanalmodell mit lokalisierten Zuständen erklärt.

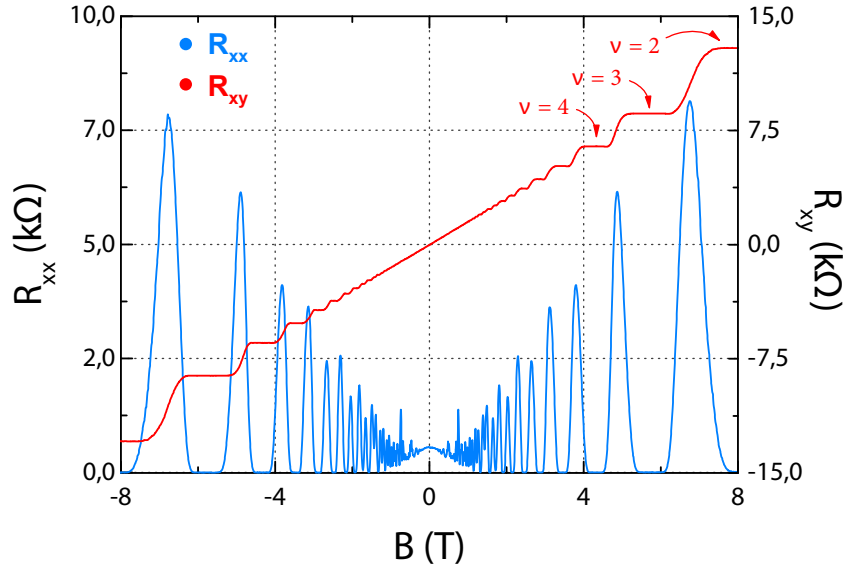


Abbildung 2.5 Beispiel einer Messung des Hall- und Längswiderstandes als Funktion der Magnetfeldstärke. Bei höheren Magnetfeldern treten Quanteneffekte auf, die klassisch nicht zu erklären sind. Zur Veranschaulichung sind einige Füllfaktoren ν angegeben.

In der bisherigen quantenmechanischen Betrachtung wurde das Randpotential $U(y)$ vernachlässigt. Möchte man nun dessen Einfluss auf die Energieeigenwerte berücksichtigen, erfolgt dies mit der Störungstheorie 1. Ordnung. Aus Gleichung 2.7 wird unter Berücksichtigung des Randpotentials und der dazugehörigen Eigenfunktion $|n, k\rangle$:

$$E \approx (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + \langle n, k | U(y) | n, k \rangle . \quad (2.29)$$

Das Randpotential führt zum Hochbiegen der Landau-Niveaus. Es entstehen Schnittpunkte mit dem Fermi-Level, wodurch sich eindimensionale Randkanäle ausbilden können. Das wird möglich, weil nur die Zustände zum Ladungstransport beitragen, die direkt an der Fermi-Kante liegen. Voraussetzung ist allerdings, dass die Fermi-Energie genau zwischen zwei Landau-Niveaus liegt (Abbildung 2.6(a)). Die Berechnung der Gruppengeschwindigkeit der Elektronen mit

$$\nu(n, k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \quad (2.30)$$

zeigt, dass in diesem Fall im Innern kein Strom fließt. Denn dort ist $\partial U(y)/\partial y = 0$ und damit $\nu(n, k) = 0$. Die Randkanäle transportieren den Strom auf gegenüberliegenden Seiten in entgegengesetzte Richtungen (Abbildung 2.6(b)), da $\partial U(y)/\partial y$ das

Vorzeichen wechselt. Der Widerstand wird hierbei minimal, da Elektronen aufgrund der räumlichen Trennung nicht in einen gegenüberliegenden Kanal gestreut werden können. Die räumliche Trennung verschwindet sobald die Fermi-Energie auf Höhe eines Landau-Niveaus liegt, wodurch der Widerstand steigt. Die Maxima des Längswiderstandes steigen mit zunehmendem Magnetfeld, da mehr Zustände auf einem Landau-Niveau liegen und damit die Streuwahrscheinlichkeit zunimmt.

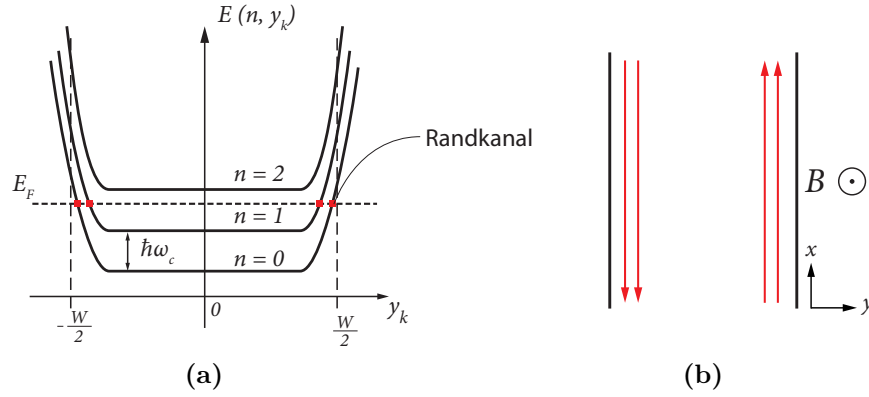


Abbildung 2.6 (a) Verlauf des Randpotentials $U(y)$ in Abhängigkeit von der Probengeometrie und (b) Entstehung eindimensionaler Randkanäle an der Fermi-Kante. Gegenüberliegende Seiten tragen den Strom in entgegengesetzte Richtungen.

Aus der $1/B$ -Periodizität der Widerstandsminima ergibt sich nach [Gleichung 2.13](#) eine zweite Möglichkeit zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte n_s :

$$\left(\frac{1}{B_{i+1}} - \frac{1}{B_i} \right) = \Delta \frac{1}{B_i} = g_s \frac{e}{n_s h} . \quad (2.31)$$

Die Hall-Plateaus können ebenfalls mit dem Randkanalmodell und dem Landauer-Büttiker-Formalismus erklärt werden. Der Leitwert eines Randkanals ist konstant und von seiner Länge unabhängig:

$$G = \frac{e^2}{h} . \quad (2.32)$$

Die Anzahl der stromführenden Randkanäle entspricht der Anzahl besetzter Landau-Niveaus und wird durch den Füllfaktor ν angegeben. Daraus ergibt sich der Gesamtleitwert

$$G = \nu \frac{e^2}{h} \quad (2.33)$$

und der Hall-Widerstand als das Inverse des Leitwertes

$$R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} . \quad (2.34)$$

Bei tiefen Temperaturen liegt die Fermi-Energie immer beim höchsten besetzten Niveau. Mit steigendem Magnetfeld wächst der Abstand der Landau-Niveaus und dadurch zunächst auch die Fermi-Energie. Mit wachsendem Magnetfeld steigt allerdings auch der Entartungsgrad: Immer mehr Elektronen finden auf tiefer liegenden Landau-Niveaus Platz, bis das höchste Niveau vollständig entleert ist. Die Fermi-Energie springt abrupt auf das darunter liegende Landau-Niveau ([Abbildung 2.7](#)), wodurch sie bei diesem Modell nie zwischen zwei Landau-Niveaus liegen kann.

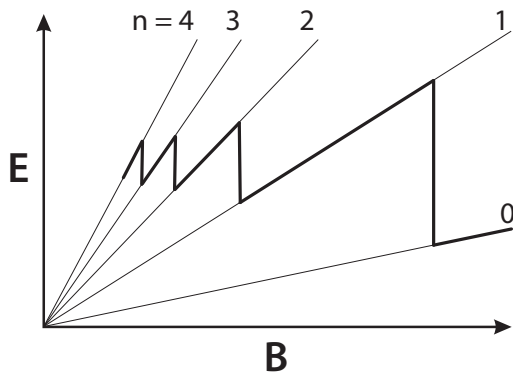


Abbildung 2.7 Die Fermi-Energie springt bei steigendem Magnetfeld nach Entleerung des obersten Landau-Niveaus in das darunter liegende.

Diese Tatsache würde dazu führen, dass sich keine Randkanäle ausbilden können. In realen Systemen werden allerdings die Ladungsträger an Verunreinigungen und Kristalldefekten gestreut. Dies führt zu verbreiterten Landau-Niveaus mit lokalisierten Zuständen dazwischen, die nicht zum Stromtransport beitragen ([Abbildung 2.8](#)). Die Fermi-Energie ändert sich dadurch nicht mehr abrupt, sondern bewegt sich durch die lokalisierten Zustände zwischen den Landau-Niveaus.

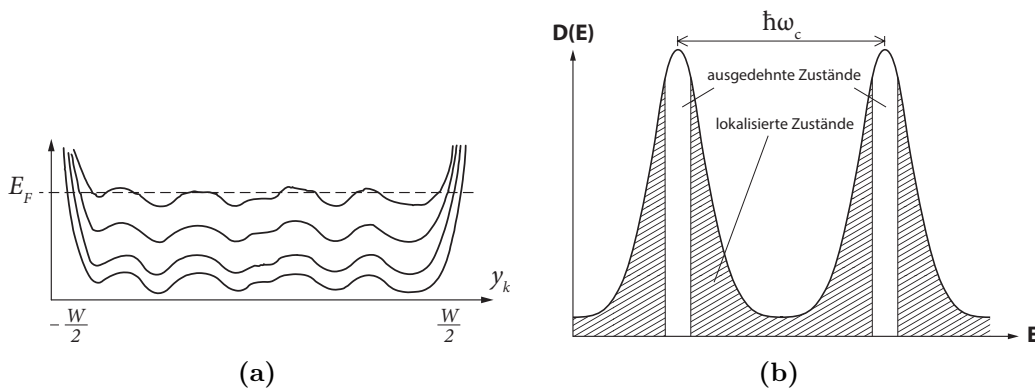


Abbildung 2.8 (a) Unter dem Einfluss von Verunreinigungen und Kristalldefekten ist die Energiedispersion im Inneren der Probe nicht mehr konstant. Die Fermi-Energie kann sich auf Zuständen zwischen den Landau-Niveaus stabilisieren. (b) Dies führt zur Verbreiterung der Landau-Niveaus mit lokalisierten Zuständen. Diese tragen nicht zum Ladungsträgertransport bei.

2.2 Paramagnetismus in (In,Mn)As

Die verwendete Mn-dotierte InAs-Heterostruktur hat aufgrund der Elektronenkonfiguration ein maximales Gesamtdrehmoment von $J = 5/2$ ($S = 5/2$, $L = 0$) und weist paramagnetisches Verhalten auf, das durch Magnetisierungsmessungen belegt wurde [40]. Eine langreichweitige Ordnung fehlt aufgrund der geringen Dotierkonzentration ($x < 0,01$), wodurch jedes Mn-Ion als isoliert betrachtet werden kann [10]. Eine weitere Beschreibung des Materials findet sich in [Abschnitt 3.1](#). Dieser Abschnitt gibt einen Überblick der für diese Arbeit notwendigen Grundlagen im Bereich des (Para-)Magnetismus. Im Wesentlichen wird dabei wie in [33, 41, 42] vorgegangen.

Zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} – in der Arbeit allgemein als Magnetfeld bezeichnet – gilt im Vakuum folgender Zusammenhang:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} , \quad (2.35)$$

mit der magnetischen Permeabilität des Vakuums μ_0 . Der magnetische Zustand eines Materials wird durch die Magnetisierung \vec{M} charakterisiert, wobei zum Magnetfeld folgende Beziehung besteht:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) . \quad (2.36)$$

Man betrachtet die Magnetisierung auch als die Dichte magnetischer Dipolmomente $\vec{\mu}$:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \frac{N}{V} . \quad (2.37)$$

Das magnetische Moment $\vec{\mu}$ eines Atoms wird durch den Elektronenspin oder den Bahndrehimpuls der Elektronen verursacht. Bei vollständig besetzten Elektronenschalen addieren sich der Bahndrehimpuls und der Spin zu Null. Ein magnetisches Moment kann es daher nur bei teilweise gefüllten Schalen geben. Die magnetischen Momente $\vec{\mu}_L$ und $\vec{\mu}_S$, sind mit dem Bahndrehimpuls \vec{L} und dem Elektronenspin \vec{S} wie folgt verknüpft:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e\hbar}{2m_e} \cdot \vec{L} = -\mu_B \cdot \vec{L} , \quad (2.38)$$

$$\vec{\mu}_S = \mu_B \cdot g \cdot \vec{S} . \quad (2.39)$$

Dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton und $g = 2,0023$ der Landé-Faktor eines Elektrons im Vakuum.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen Magnetfeld und Magnetisierung lässt sich mit der Suszeptibilität χ herstellen

$$\chi = \frac{\vec{M}}{B} \mu_0, \quad (2.40)$$

durch dessen Einführung eine Klassifizierung von magnetischem Verhalten möglich wird:

- **Paramagnetismus** $\chi > 0$

Bei einem Paramagneten existieren aufgrund der Elektronenkonfiguration permanente magnetische Momente, welche sich in einem externen Magnetfeld ausrichten und es dadurch verstärken. Wird das äußere Feld abgeschaltet, verteilen sich die magnetischen Momente wieder zufällig und die mittlere Magnetisierung ist Null.

- **Ferromagnetismus** $\chi \gg 0$

Ferromagnetische Materialien besitzen ebenfalls magnetische Momente. Unterhalb der Curie-Temperatur T_C bilden sich sogenannte Weißsche Bezirke, innerhalb derer die Momente parallel ausgerichtet sind. Unterschiedliche Bezirke weisen allerdings unterschiedliche Magnetisierungsrichtungen auf. Durch ein äußeres Feld wachsen die magnetischen Domänen, die parallel zum angelegten Feld orientiert sind. Bei genügend großer Magnetfeldstärke sind alle Momente ausgerichtet. Beim Abschalten des externen Magnetfeldes bleiben die Domänen erhalten, wodurch das Material magnetisiert bleibt. Oberhalb der Curie-Temperatur verschwinden die Weißschen Bezirke und das Material wird paramagnetisch.

- **Diamagnetismus** $\chi < 0$

Diamagneten weisen eine negative Suszeptibilität auf. Ein äußeres Magnetfeld beeinflusst den Bahndrehimpuls und aufgrund der Lenzschen Regel wird ein magnetisches Moment induziert, das dem äußeren Feld entgegengerichtet ist. Dieser Effekt tritt bei allen Atomen und Molekülen auf, wird allerdings durch den Para- und Ferromagnetismus überlagert. Daher ist Diamagnetismus vor allem bei Systemen mit abgeschlossener Elektronenkonfiguration oder Atomen hoher Ordnungszahl mit zahlreichen vollbesetzten Schalen beobachtbar.

Der Paramagnetismus wird im weiteren Verlauf noch näher betrachtet. Es ist eine weitere Unterteilung nach folgenden Kategorien möglich:

- **Atomarer Paramagnetismus**

- Langevin-Paramagnetismus
- Van-Vleck-Paramagnetismus

- **Paramagnetismus der Leitungselektronen** (Pauli-Paramagnetismus)

Die aufgeführten Arten unterscheiden sich in der Größenordnung ihrer magnetischen Suszeptibilität und in ihrer Temperaturabhängigkeit, wie in [Abbildung 2.9](#) veranschaulicht wird.

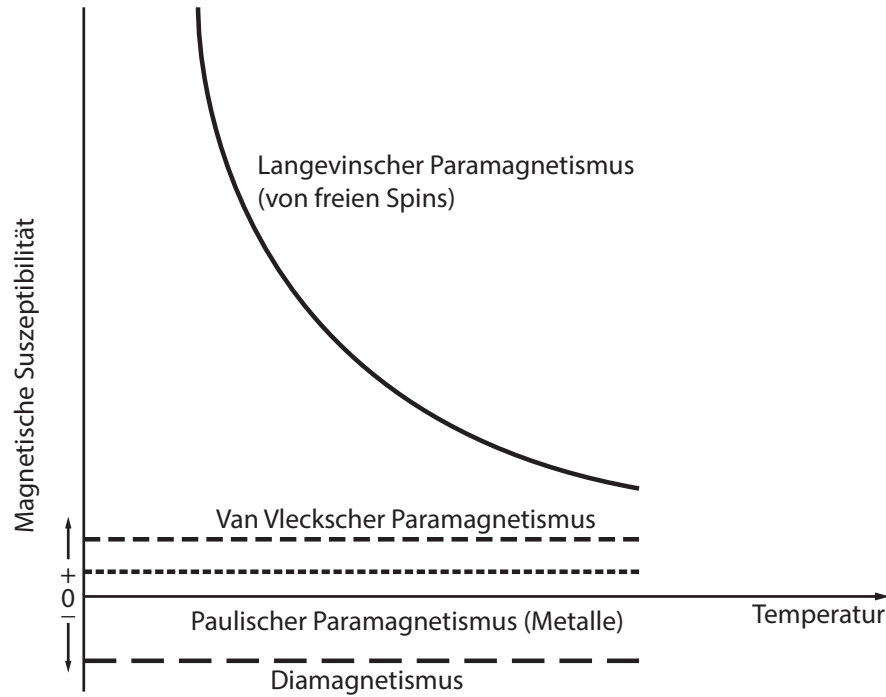


Abbildung 2.9 Magnetische Suszeptibilität als Funktion der Temperatur für verschiedene Arten des Paramagnetismus (aus [33]).

2.2.1 Langevinscher Paramagnetismus und Brillouin-Funktion

Einzelne magnetische Momente sind mit dem Drehimpuls eines geladenen Teilchens gekoppelt, wobei zwischen drei Beiträgen unterschieden wird: Der Elektronenspin S , der Bahndrehimpuls L der Elektronen und der Kernspin I . Die wesentlichen Komponenten für den Paramagnetismus sind der Spin und der Bahndrehimpuls der Elektronen. Da in vollständig gefüllten Schalen die Elektronenspins antiparallel angeordnet sind, heben sich die magnetischen Momente gegenseitig auf. Das gleiche gilt für den Bahndrehimpuls. Daher kann es, wie zu Beginn beschrieben, nur bei teilweise gefüllten Schalen einen nichtverschwindenden Beitrag zum Paramagnetismus geben. Grundsätzlich gilt für den Gesamtdrehimpuls J :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (2.41)$$

Die beiden Komponenten sind durch die Vektorsumme der Beiträge einzelner Elektronen gegeben:

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i, \quad \vec{L} = \sum_i \vec{l}_i. \quad (2.42)$$

Spin- und Bahndrehimpuls für den Grundzustand freier Atome können nach den Hundschen Regeln bestimmt werden.

Für den Gesamtdrehimpuls J mit der magnetischen Quantenzahl m_J und dem Landé-Faktor g besitzen die Zustände im Magnetfeld \vec{B} die Energie

$$E(m_J) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = m_J g \mu_B B = \mu_{m_J} \cdot B . \quad (2.43)$$

Die magnetische Quantenzahl kann Werte zwischen J und $-J$ annehmen. In Abwesenheit eines Magnetfeldes sind die Energieniveaus $(2J + 1)$ -fach entartet.

Die Besetzung der Energiezustände kann im thermischen Gleichgewicht mit der Boltzmann-Verteilungsfunktion beschrieben werden. Für die Magnetisierung folgt daraus:

$$M = N_0 \cdot \sum_{m_J=-J}^J \mu_{m_J} \cdot n(E(m_J)) \quad (2.44)$$

mit der Gesamtzahl der Momente pro Volumeneinheit N_0 und der Besetzungszahl $n(E(m_J))$ für das Niveau mit der Energie $E(m_J)$. Ein Zusammenfassen der Terme ergibt die bekannte Formel für die Magnetisierung:

$$M = N_0 g \mu_B J B_J(\tilde{x}) \quad \text{mit} \quad \tilde{x} = \frac{g \mu_B J B}{k_B T} . \quad (2.45)$$

Die Brillouin-Funktion $B_J(\tilde{x})$ zum Gesamtdrehimpuls J ist dabei definiert als

$$B_J(\tilde{x}) = \frac{2J+1}{2J} \cdot \coth\left(\frac{2J+1}{2J} \tilde{x}\right) - \frac{1}{2J} \cdot \coth\left(\frac{1}{2J} \tilde{x}\right) . \quad (2.46)$$

Die [Abbildung 2.10](#) zeigt den magnetfeldabhängigen Verlauf der Brillouin-Funktion bei unterschiedlichen Temperaturen. Für hohe Temperaturen, d. h. $\tilde{x} \ll 1$, kann $B_J(\tilde{x})$ nach \tilde{x} entwickelt werden. Es folgt:

$$M \approx N_0 J(J+1) \frac{g^2 \mu_B^2 B}{3 k_B T} = \frac{C}{T} \cdot B \quad (2.47)$$

und mit [Gleichung 2.40](#) ergibt sich das bekannte Curie-Gesetz:

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (2.48)$$

mit $C = \mu_0 N_0 J(J+1)(g^2 \mu_B^2 / 3 k_B)$. Die Suszeptibilität hat eine Größenordnung von $\chi_{\text{Langevin}} \sim 10^{-3} \dots -2$ [\[43\]](#).

Für tiefe Temperaturen und hohe Magnetfelder (siehe [Abbildung 2.10](#)), d. h. $\tilde{x} \gg 1$, konvergiert die Brillouin-Funktion gegen 1 und für die Sättigungsmagnetisierung M_s gilt:

$$M = M_s = N_0 g \mu_B J . \quad (2.49)$$

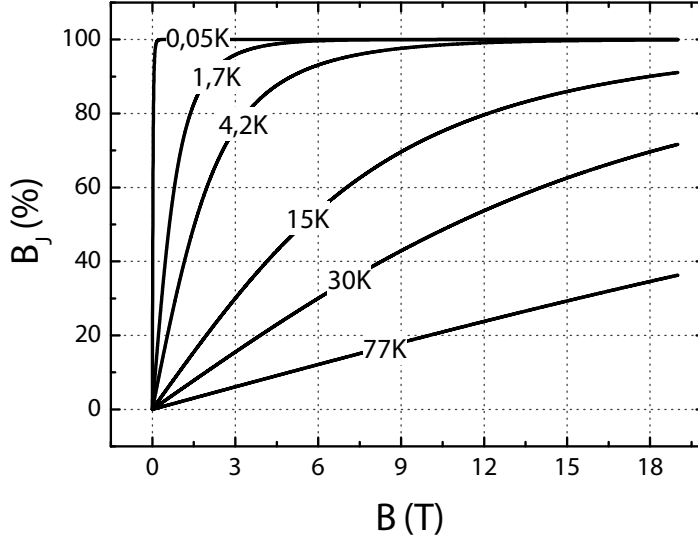


Abbildung 2.10 Brillouin-Funktion für verschiedene Temperaturen bei $J = 5/2$. Ab etwa 15 K benötigt man zur Sättigung bereits Magnetfelder weit jenseits von 19 T. Mit steigender Temperatur nimmt B_J einen linearen Verlauf an.

2.2.2 Van Vleck'scher Paramagnetismus

Atome, die im Grundzustand einen Gesamtdrehimpuls $J = 0$ haben und daher kein magnetisches Moment besitzen, können im angeregten Zustand trotzdem Paramagnetismus aufweisen. Die angeregten Zustände entstehen, indem das äußere Feld auf die Wellenfunktion einwirkt und die Übergänge induziert [\[42\]](#).

Zunächst betrachtet man die Energieverschiebung des Grundzustandes in einem externen Magnetfeld mit Hilfe der Störungstheorie zweiter Ordnung. Für ΔE_0 ergibt sich:

$$\Delta E_{0,vanVleck} = - \sum_{m=1,2,\dots} \frac{|\langle m | \mu_B (L_z + g S_z) B_z | 0 \rangle|^2}{E_m - E_0} \quad (2.50)$$

Bildet man die zweite Ableitung der Energieänderung nach dem angelegten Magnetfeld, also $\chi = -\mu_0 N_0 (\partial^2 \Delta E_0 / \partial B^2)$, erhält man den van Vleck-Beitrag:

$$\chi_{vanVleck} = 2\mu_0 \mu_B^2 N_0 \sum_{m=1,2,\dots} \frac{|\langle m | L_z + g S_z | 0 \rangle|^2}{E_m - E_0} > 0 . \quad (2.51)$$

Es gibt nun zwei Realisierungsmöglichkeiten für $J = 0$ [\[42\]](#):

- Für abgeschlossene Schalen gilt: $J = L = S = 0$. In diesem Fall verschwindet der van Vleck-Paramagnetismus, da $\hat{L}_z|n\rangle = \hat{S}_z|n\rangle = 0$
- Für fast halb gefüllte Schalen gilt: $L = S$, $J = |L - S| = 0$. Es ergibt sich nun ein paramagnetischer Beitrag ohne permanentes magnetisches Moment.

Die Größenordnung der dadurch hervorgerufenen Suszeptibilität bei Raumtemperatur beträgt in etwa $\chi_{\text{van Vleck}} \sim 10^{-6} \dots -5$ [43].

2.2.3 Paramagnetismus der Leitungselektronen (Pauli-Paramagnetismus)

Zunächst wurde bei Leitungselektronen, mit einem magnetischen Moment μ_B , vermutet, dass sie einen Curie-ähnlichen Beitrag zur Magnetisierung von Metallen liefern:

$$M = N_0 \frac{\mu_B^2 B}{k_B T} . \quad (2.52)$$

Experimentell wurde allerdings ein kleiner, temperaturunabhängiger Beitrag gefunden. Die Berücksichtigung des Pauli-Prinzips und der Besetzung der Energieniveaus im Leitungsband nach der Fermi-Dirac-Verteilung ermöglicht die Auflösung dieses Widerspruchs. Die Wahrscheinlichkeit für einen parallel zu B ausgerichteten Spin ist um den Faktor $\exp(\mu_B B / k_B T)$ größer als für einen antiparallel ausgerichteten [44]. Nach dem Pauli-Prinzip kann ein Spin die Orientierung nicht ändern, wenn der Zustand mit umgekehrtem Spin bereits besetzt ist. Daraus folgt, dass nur Elektronen innerhalb des Energieintervalls $\approx \pm k_B T$ um die Fermi-Kante eine endliche Wahrscheinlichkeit haben ihren Spin in einem äußeren Feld umzudrehen. Der Anteil dieser Elektronen kann mit T/T_F abgeschätzt werden, wobei $T_F = E_F/k_B$ die Fermi-Temperatur ist. Für die Magnetisierung folgt daraus die beobachtete Temperaturunabhängigkeit:

$$M \approx \frac{N_0 \mu_B^2 B}{k_B T} \cdot \frac{T}{T_F} = \frac{N_0 \mu_B^2}{k_B T_F} \cdot B . \quad (2.53)$$

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein freies Elektronengas in einem externen Magnetfeld. Die Zeeman-Wechselwirkung bewirkt eine energetische Absenkung (Zustände parallel zum Feld) oder Erhöhung (antiparallel zum Feld) um $\mu_B B$. Der Verlauf der Zustandsdichte spaltet sich demnach in zwei um $2\mu_B B$ verschobene Parabeln auf⁸ (Abbildung 2.11). Die Anzahl der Elektronen stellt sich so ein, dass daraus eine stabile Anordnung resultiert, bei der beide Zustände bis zur Fermi-Energie besetzt sind. Eine Berechnung der Besetzungszahlen der Energieniveaus und die daraus

⁸Allgemein gilt: $g\mu_B B$. Wobei für g der korrekte Landé-Faktor für Löcher oder Elektronen eingesetzt werden muss.

folgende Magnetisierung, wie in [44] dargestellt, bestätigt qualitativ die hergeleitete Gleichung 2.53. Für die Pauli-Suszeptibilität χ_{Pauli} folgt:

$$\chi_{Pauli} = \frac{3N_0\mu_0\mu_B^2}{2k_B T_F}. \quad (2.54)$$

Die Suszeptibilität bei Raumtemperatur beträgt $\chi_{Pauli} \sim 10^{-6} \dots -5$ und hat damit die gleiche Größenordnung wie $\chi_{vanVleck}$ [43].

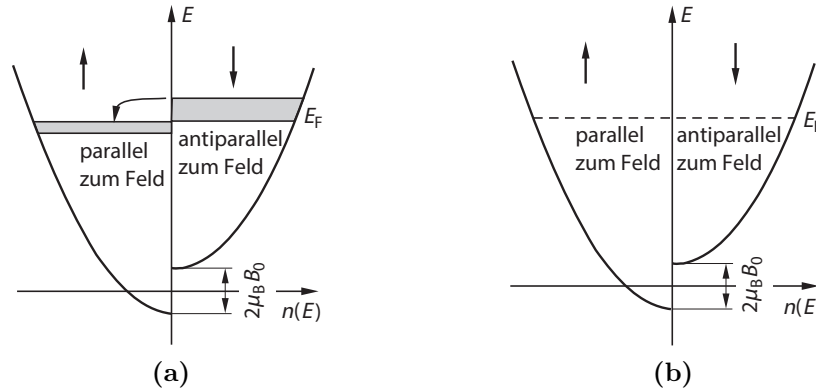


Abbildung 2.11 Verschiebung der Energiebänder im Magnetfeld. (a) Instabile Anordnung mit unterschiedlichen Fermi-Energien. (b) Stabile Anordnung mit Elektronenübergang und daraus resultierendem Überschuss von Elektronen mit Spin parallel zum angelegten Magnetfeld (aus [44]).

2.3 Spin-Bahn-Kopplung in InAs

Die Wechselwirkung des Spins eines Elektrons mit dessen Bahndrehimpuls bezeichnet man als Spin-Bahn-Kopplung (SOI⁹). Zur Veranschaulichung betrachtet man das Bohrsche Atommodell, bei dem sich das Elektron um seinen Atomkern bewegt. Im Ruhesystem des Elektrons bewegt sich der positive Kern um das Elektron und erzeugt dabei nach dem Gesetz von Biot-Savart ein Magnetfeld parallel zum Bahndrehimpulsvektor. Dieses induzierte Feld kann mit dem Elektronenspin wechselwirken.

2.3.1 Einflüsse auf die Valenzbandstruktur

Die Spin-Bahn-Kopplung führt zu Besonderheiten bei der Valenzbandstruktur von InAs. Bei Halbleitern, die in der Zinkblendestruktur kristallisieren, hat das energetisch tiefstliegende Leitungsband s-artigen ($l = 0$) und das höchstliegende Valenzband p-artigen ($l = 1$) Charakter [34]. Dadurch ist das Valenzband 6-fach und das

⁹Spin orbit interaction.

Leitungsband 2-fach spinentartet. Bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung, spaltet das 6-fach entartete Valenzband in ein 4-fach und ein 2-fach entartetes Band auf (Abbildung 2.12). Das 2-fach entartete Band mit dem Gesamtdrehimpuls $j = 1/2$ liegt energetisch weit unter dem 4-fach entarteten Band ($j = 3/2$), weshalb es Split-Off Band (SO) genannt wird. Das energetisch höhere Band besteht aus zwei Subbändern, die am Γ -Punkt entartet sind. Diese Bänder unterscheiden sich durch ihre Krümmung und weisen dadurch eine unterschiedliche effektive Masse auf. Man spricht von einem Schwerlochband (HH¹⁰) mit $m_j = \pm 3/2$ und einem Leichtlochband (LH¹¹) mit $m_j = \pm 1/2$.

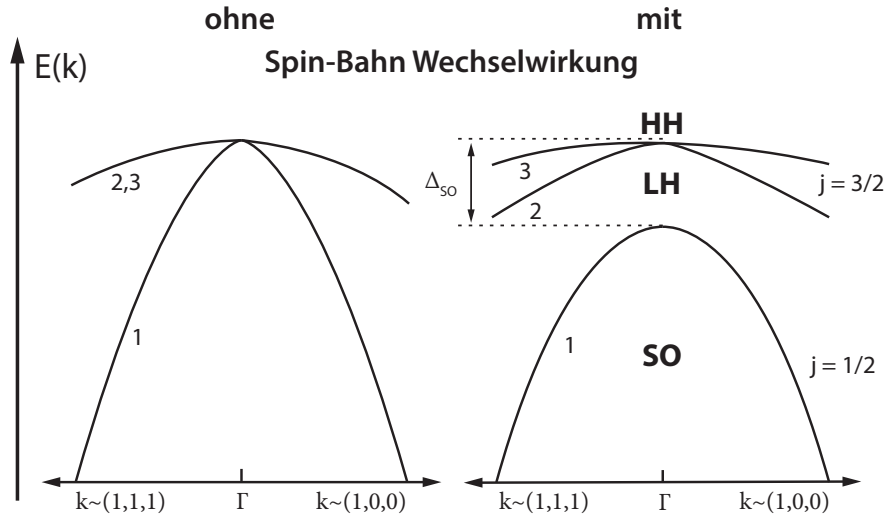


Abbildung 2.12 Schematische Darstellung des Valenzbandes einer Zinkblendestruktur unter dem Einfluss der Spin-Bahn-Wechselwirkung (aus [34]).

Die Energiedispersion der Lochbänder kann, unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung, mit der $\vec{k} \cdot \vec{p}$ -Methode berechnet werden [45]. Beim (4×4) -Luttinger-Modell werden vier, beim (8×8) -Kane-Modell acht und beim (16×16) -Extended-Kane-Modell 16 Subbänder berücksichtigt. Je mehr Subbänder in die Berechnung einfließen, desto genauer kann die Bandstruktur beschrieben werden. Die Energiedispersion der Lochbänder verliert damit zunehmend ihre Parabolizität und es kommt zum sogenannten „anticrossing“ (Abbildung 2.13). Eine eingehende Beschäftigung zu diesem Thema findet sich im Buch von Roland Winkler [45].

2.3.2 Inversions-Asymmetrie (Rashba- und Dresselhaus-Effekt)

Die Spinentartung der Elektronen- und Lochzustände ist bedingt durch die räumliche ($E(k, \uparrow) = E(-k, \uparrow)$) und zeitliche ($E(k, \uparrow) = E(-k, \downarrow)$) Inversions-Symmetrie, die kombiniert zu einer zweifachen Entartung der Energie einzelner Teilchen führen ($E(k, \uparrow) = E(k, \downarrow)$). Die Entartung wird allerdings aufgehoben, wenn durch

¹⁰Heavy hole.

¹¹Light hole.

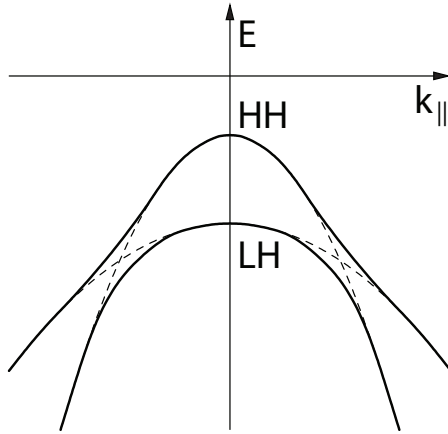


Abbildung 2.13 Schematische Darstellung des „anticrossing“ von Schwer- (HH) und Leichtlochband (LH) (aus [45]).

Anlegen eines externen Magnetfeldes die zeitliche Inversions-Symmetrie gebrochen wird. Bewegen sich die Ladungsträger allerdings in einem Potential, das inversions- asymmetrisch ist, wird die Spinentartung auch ohne angelegtes Magnetfeld aufgehoben. Bei zweidimensionalen Ladungsträgersystemen ist diese Spinaufspaltung entweder die Konsequenz der „*Bulk Inversion Asymmetrie*“ (BIA) oder der „*Structure Inversion Asymmetrie*“ (SIA).

In Halbleiterstrukturen ohne Symmetriezentrum, wie bei Zinkblende-Kristallen, fehlt die räumliche Inversions-Symmetrie, sodass auch ohne ein äußeres Magnetfeld die Spinentartung aufgehoben wird. Diese Spinaufspaltung durch die „*Bulk Inversion Asymmetrie*“ (BIA) wird anhand des Dresselhaus-Terms beschrieben [46]:

$$H_{SO}^{BIA} = \beta(k_x\sigma_x - k_y\sigma_y) + \gamma(-\sigma_x k_x k_y^2 + \sigma_y k_y k_x^2), \quad (2.55)$$

mit den Komponenten des Wellenvektors \vec{k} , den Pauli-Spin-Matrizen σ_x und σ_y und den materialspezifischen Parametern β und γ [47]. Der Parameter β wird auch Dresselhaus-Parameter genannt. Der hintere, quadratisch von \vec{k} abhängige Anteil, wird im Allgemeinen vernachlässigt [48].

Die Struktur-Inversions-Asymmetrie kann bei 2D-Systemen durch die Asymmetrie des einschränkenden Potentials oder durch ein von außen angelegtes elektrisches Feld (z. B. durch eine Gateelektrode) erzeugt werden. Diese Asymmetrie ist in die Wachstumsrichtung der Heterostruktur orientiert und wird durch den Rashba-Term charakterisiert [49]:

$$H_{SO}^{SIA} = \alpha(k_y\sigma_x - k_x\sigma_y). \quad (2.56)$$

Der Rashba-Parameter α hängt von der Asymmetrie des Quantentrogs ab. Ein weiterer Beitrag zur Spin-Bahn-Kopplung ist die „*Interface Inversion Asymmetrie*“ (IIA), die meist vernachlässigt oder aufgrund des ähnlichen Verhaltens der BIA zugeschrieben werden kann [45, 50].

Der Hamiltonian für ein zweidimensionales System kann unter Berücksichtigung der Inversions-Asymmetrie geschrieben werden als:

$$H = H_0 + \alpha(k_y\sigma_x - k_x\sigma_y) + \beta(k_x\sigma_x - k_y\sigma_y) . \quad (2.57)$$

2.4 Die s,p-d-Austauschwechselwirkung in DMS-Systemen

Die sogenannte s,p-d Austauschwechselwirkung zwischen den s-artigen Leitungs- bzw. den p-artigen Valenzbandelektronen und den lokalisierten Elektronen von Übergangsmetallen (z. B. Mn mit halbbesetzter 3d-Schale) beeinflusst im erheblichen Maße die Eigenschaften verdünnt-magnetischer Halbleiter (DMS) wie $\text{In}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$. Sie führt zu einer starken Spinaufspaltung der elektrischen Niveaus und dadurch zu einer deutlichen Beeinflussung der magneto-optischen Eigenschaften und Transportcharakteristika. Daher unterscheidet sich das Verhalten verdünnt-magnetischer Halbleiter markant von ihren nicht-magnetischen Gegenstücken. In dieser Arbeit ist durch die p-Dotierung des untersuchten Materials vor allem die Wechselwirkung zwischen Mn-Ionen und den Valenzbandlöchern (p-d Wechselwirkung) von Interesse. Die folgende Darstellung orientiert sich weitgehend an der Publikation von Furdyna [10].

Betrachten wir zunächst einen nichtmagnetischen Halbleiter. Sobald ein externes Magnetfeld anliegt, spalten die Leitungs- und Valenzbänder in Landau-Niveaus auf und jedes Landau-Niveau in weitere Unterniveaus, entsprechend der Spinausrichtung der Elektronen. Diese Struktur wird durch einen geeigneten Hamiltonian H_0 ausreichend beschrieben, mit Ausnahme des Beitrags der Austauschwechselwirkung. Enthält der betrachtete Halbleiter lokalisierte magnetische Momente, verändert sich die Bandstruktur durch die Austauschwechselwirkung dieser Momente mit den Bandelektronen. Dieser Wechselwirkung wird durch das Hinzufügen eines Austauschterms H_{ex} zum ursprünglichen Hamiltonian Rechnung getragen. Der Hamiltonian wird zu:

$$H = H_0 + H_{ex} \quad (2.58)$$

mit

$$H_{ex} = \sum_{\vec{R}_i} \vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R}_i) \vec{S}_i \cdot \vec{\sigma} . \quad (2.59)$$

Dabei ist \vec{S}_i der Spinoperator am Ort \vec{R}_i für das Mn-Ion, $\vec{\sigma}$ der Spinoperator am Ort \vec{r} für das Bandelektron (im Falle von (In,Mn)As das p-artige Loch) und $\vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R}_i)$ das Austauschintegral.

Die stark ausgedehnte Wellenfunktion der Elektronen schließt eine genügend große Zahl an magnetischen Ionen ein, sodass mittels der Molekularfeldnäherung der Spin-

operator S_i durch das thermodynamische Mittel über alle Mn-Ionen $\langle \vec{S} \rangle$ ersetzt werden kann. Für paramagnetische Systeme ist diese Größe, bei einem angelegten Feld in Z-Richtung ($\langle \vec{S} \rangle = \langle S_z \rangle$), direkt mit deren Magnetisierung verknüpft (siehe Gleichung 2.45). Dadurch vereinfacht sich die Gleichung 2.59 zu:

$$H_{ex} = \langle S_z \rangle \sum_{\vec{R}_i} \vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R}_i) \vec{\sigma} . \quad (2.60)$$

Aufgrund der ausgedehnten Wellenfunktion kann $\vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R}_i)$ ebenfalls durch $\vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R})$ ersetzt werden. Die Summe geht über alle Gitterplätze, die mit Mn besetzt sind. Berücksichtigt man zusätzlich die zufällige Verteilung der magnetischen Ionen mit ihrer Konzentration x durch die "virtual crystal approximation", vereinfacht sich der Ausdruck weiter zu:

$$H_{ex} = \vec{\sigma}_z \langle S_z \rangle x \sum_{\vec{R}} \vec{J}^{sp-d}(\vec{r} - \vec{R}) . \quad (2.61)$$

Die Koordinate jedes Gitterplatzes des Kationen-Untergitters wird durch \vec{R} beschrieben und es wird nun über alle Kationen-Plätze summiert. Damit ist H_{ex} gitterperiodisch.

Die Wirkung eines externen Magnetfeldes auf Bandlelektronen wird einerseits durch den Zeeman-Term, andererseits durch die Austauschwechselwirkung beschrieben. Daher ist es zweckmäßig beide Energien unter einem effektiven g-Faktor g_{eff} zusammenzufassen. Wir nehmen einen parabolischen Verlauf des Leitungsbandes an. Die Eigenenergien des n-ten Landau-Levels lauten:

$$E_{\pm} = E_i + (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \pm \frac{1}{2} g_{eff} \mu_B B , \quad (2.62)$$

$$\text{mit} \quad g_{eff} = g^* - xN_0 \alpha \frac{\langle S_z \rangle}{\mu_B B} = g^* + \alpha \frac{M(B, x, T)}{g_{Mn} \mu_B^2 B} . \quad (2.63)$$

Dabei ist ω_c die Zyklotronfrequenz, g^* der intrinsische g-Faktor der Leitungsbandelektronen, x die Mn-Konzentration, N_0 die Anzahl der Kationen pro Volumen und α das Austauschintegral der s-artigen Leitungsbandelektronen,

$$\alpha = \langle S | J_{sd} | S \rangle / \Omega_0 , \quad (2.64)$$

mit Ω_0 dem Volumen der Einheitszelle.

Aufgrund der Entartung des Valenzbandes am Γ -Punkt ist die Beschreibung des Energiebeitrags der Austauschwechselwirkung komplizierter. Der dominierende Effekt kann allerdings durch Ersetzen des Luttinger-Parameters κ ausgedrückt werden:

$$\kappa_{eff} = \kappa - xN_0\beta \frac{\langle S_z \rangle}{(6\mu_B B)} . \quad (2.65)$$

Hier ist β das Austauschintegral für die p-artigen Löcher des Valenzbandes,

$$\beta = \langle X | J_{pd} | X \rangle / \Omega_0 . \quad (2.66)$$

Die Integrale α und β sind proportional zu den Austauschintegralen J_{sd} und J_{pd} und werden durch die jeweiligen Bloch-Wellenfunktionen S und X gebildet. Die Situation unterscheidet sich von nichtmagnetischem Material demnach durch den effektiven g-Faktor, der mit der Magnetisierung verknüpft ist. Daraus ergibt sich nun eine Temperatur-, Magnetfeld- und Dotierabhängigkeit. Besonders bei tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern ist der Austauschbeitrag groß, ohne externes Magnetfeld verschwindet er ([Abbildung 2.14](#)).

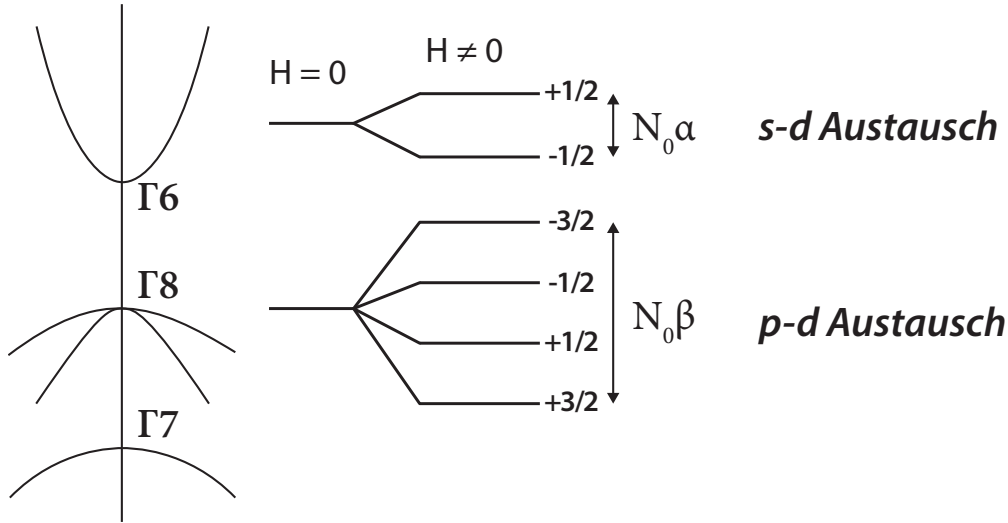


Abbildung 2.14 Schematische Darstellung der Spinaufspaltung mit und ohne s,p-d-Austauschwechselwirkung.

Zwei Prozesse tragen zur Austauschwechselwirkung bei:

Zum einen die direkte Austauschwechselwirkung des $1/r$ -Potentials zwischen dem Band (s oder p) und den 3d-Elektronen der Mn-Ionen. Diese Kopplung richtet die Elektronenspins parallel aus, was zu einem ferromagnetischen Beitrag führt. In diesem Fall sind α und β positiv. Zum anderen die Hybridisierung des $3d^5$ -Orbitals mit den s- und p-Bandelektronen. Am Γ -Punkt ist aus Symmetriegründen die s-d-Hybridisierung verboten. Daher ist der Beitrag von $N_0\alpha$ hier Null. Für das Leitungsband ist daher durch den direkten Beitrag die Austauschwechselwirkung immer positiv. Hingegen ist die p-d-Hybridisierung immer erlaubt. Sie führt zu einem starken, antiferromagnetischen Beitrag. Das stellt den dominierenden Prozess für die p-artigen Löcher mit den lokalisierten Mn-Elektronen dar. In der Regel ist in verdünntmagnetischen Halbleitern das p-d-Austauschintegral deutlich größer und negativ.

Einen Überblick über typische Werte für $N_0\beta$ gibt [Abbildung 2.15](#). Der Umfang der Hybridisierung hängt von Materialparametern wie Gitterkonstante, Kationen- und Anionengröße ab. Der größere Effekt wird für Materialien mit verminderter Kationen- und Anionengröße erwartet [51].

Als Folge der s,p-d-Austauschwechselwirkung findet sich in DMS-Systemen ein magnetfeldgetriebener Metall-Isolator-Übergang [10], der im nächsten Abschnitt detaillierter beschrieben wird.

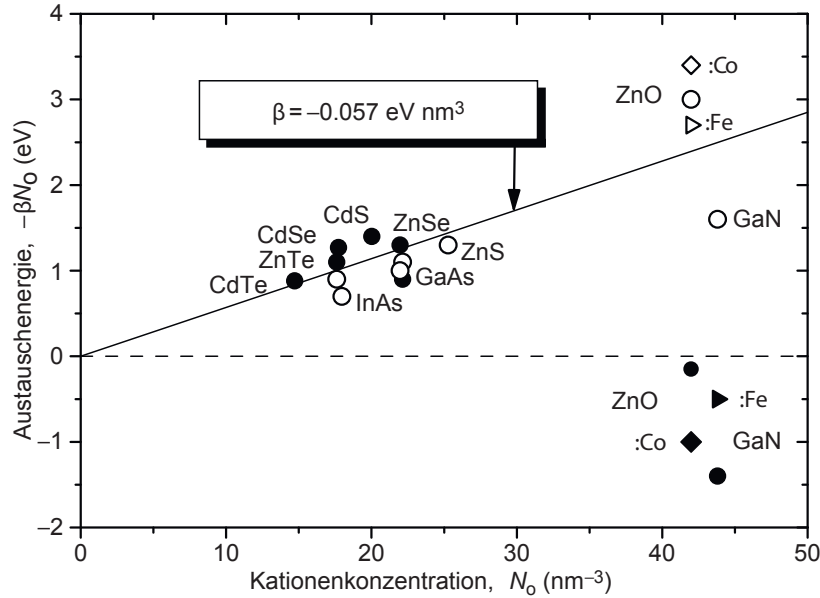


Abbildung 2.15 Experimentell bestimmte Energie $N_0\beta$ der p-d-Austauschwechselwirkung für verschiedene DMS-Systeme als Funktion der Kationenkonzentration. Nach Okabayashi et al. [52] ist für $\text{In}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ der Wert $N_0\beta = -0,7 \text{ eV}$ (aus [53]).

2.5 Metall-Isolator-Übergang und Lokalisierung

Dieser Abschnitt bildet die theoretische Grundlage für die Analyse des magnetfeld-induzierten Metall-Isolator-Übergang der in [Kapitel 4](#) untersucht wird. Hierbei soll die Vermittlung der Grundbegriffe und die Darstellung der für das untersuchte System adäquaten Widerstandsmodelle im Fokus stehen. Einen umfassenden Einblick in die Thematik geben [54–57].

Als Metall-Isolator-Übergang (MIT¹²) bezeichnet man einen Phasenübergang von Materie, bei dem insbesondere Änderungen der Transporteigenschaften auftreten. Der Phasenübergang kann unter anderem durch Änderung der Temperatur, des Drucks, der Dichte oder des Unordnungsgrades ausgelöst werden und bewirkt beispielsweise eine Änderung der elektrischen Leitfähigkeit hin zu Werten, die typisch

¹²Metal insulator transition.

für Metalle bzw. Isolatoren sind. Einer der wichtigen Aspekte auf der isolierenden Seite des MIT ist die Lokalisierung der Ladungsträger. Im Gegensatz zu metallischem Verhalten, bei dem sich die Wellenfunktion der Ladungsträger auf den gesamten Raum ausdehnt, ist die Wellenfunktion lokalisierter Ladungsträger auf einen Bereich um ein Lokalisierungszentrum beschränkt. Die „Reichweite“ der Wellenfunktion wird durch die Lokalisierungslänge ξ_{loc} charakterisiert.

Für einen Metall-Isolator-Übergang kann es zwei prinzipiell unterschiedliche Ursachen geben. Entweder führt eine Änderung im Ionengitter, wie beispielsweise ein struktureller Phasenübergang, zu einer Aufspaltung des Leitungsbandes und dadurch zu einem Metall-Isolator-Übergang oder die Ursache ist rein elektronischer Natur und kann durch Modelle mit einem konstanten Gitter oder ohne Berücksichtigung eines Gitters beschrieben werden [54]. Bei unseren Untersuchungen ist besonders die zweite Ursache von Interesse. Hierbei kann weiter unterschieden werden: Beruht der Übergang auf der Korrelation von Elektronen und ist abrupt, spricht man von einem Mott-Übergang¹³ [58]. Wird der MIT durch Unordnung ausgelöst und ist kontinuierlich, handelt es sich um einen Anderson-Übergang¹⁴ [59]. Die zwei Modelle lassen sich wie folgt charakterisieren:

Mott-Modell

Beim Mott-Modell betrachtet man eine kristalline Ordnung von Atompotentialen mit einem Elektron pro Atom. Zwischen den Elektronen herrscht die Coulombwechselwirkung. Für eine genügend hohe Ladungsträgerdichte bzw. eine genügend kleine Gitterkonstante wird das Potential des Kerns abgeschirmt und das System verhält sich metallisch. Mott argumentierte, dass oberhalb einer kritischen Gitterkonstante die Abschirmung zusammenbricht und das System einen Übergang erster Ordnung zu einem Isolator durchläuft [58]. Das sogenannte Mott-Kriterium beschreibt den kritischen Übergangspunkt. Es gilt [60]:

$$a_B \cdot n_c^{1/3} \simeq 0,25 . \quad (2.67)$$

Hierbei ist n_c die kritische Ladungsträgerdichte und a_B der effektive Bohrradius.

Anderson-Modell der starken Lokalisierung

Beim Modell der Anderson-Lokalisierung betrachtet man ein Gitter mit statistisch fluktuierenden Potentialtiefen an den Gitterplätzen und nicht wechselwirkende Elektronen. Der Grad der Unordnung im System wird durch den Parameter W/t beschrieben, wobei W die charakteristische Streubreite der Potentiale und t das Hopping-Matrixelement ist, welches im Wesentlichen die Hopping-Wahrscheinlichkeit eines Elektrons zu den einzelnen Potentialtiefen enthält [54, 59]. Nimmt der Quotient W/t zu, bilden sich an den Bandrändern lokalisierte Zustände aus. Sie sind

¹³Mott transition.

¹⁴Anderson transition.

durch die Mobilitätskante E_m von den delokalisierten Ladungsträgern in der Bandmitte getrennt (Abbildung 2.16). Eine weitere Zunahme des Unordnungsparameters lässt die Mobilitätsgrenze weiter nach Innen wandern. Das elektronische Verhalten des Systems hängt dabei von der Lage der Fermi-Energie E_F ab. Befindet sie sich im lokalisierten Bereich, ist das Material isolierend, im delokalisierten ist es metallisch. Bei p-Typ Halbleitern wie (In,Mn)As findet der Ladungsträgertransport über das Valenzband statt, daher ist der energetisch höhere Bandausläufer wichtig. Für isolierendes Verhalten gilt demnach $E_F > E_m^{(2)}$, für metallisches $E_F < E_m^{(2)}$.

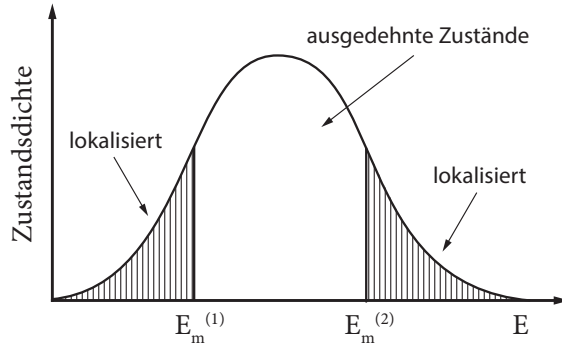


Abbildung 2.16 Schematische Darstellung der Zustandsdichte als Funktion der Energie E . Zwischen den Mobilitätskanten $E_m^{(1,2)}$ befinden sich delokalisierte Zustände. Im schraffierten Bereich sind die Zustände lokalisiert. (nach [54]).

Ein Übergang zwischen den zwei Bereichen kann entweder durch Verschieben der Fermi-Energie oder Verschieben der Mobilitätskante erreicht werden. Das kann unter anderem durch Verändern der Dotierkonzentration [61] oder durch Anlegen eines Magnetfeldes [62] erfolgen. Der Übergang im Anderson-Modell ist kontinuierlich. Ist ein Ladungsträger lokalisiert, nimmt dessen Wellenfunktion mit zunehmendem Abstand R vom Lokalisierungszentrum ab (Abbildung 2.17). Für die Wellenfunktion Ψ eines Anderson-lokalisierten Zustandes gilt:

$$\Psi(R) \sim e^{-R/\xi_{loc}} \quad (2.68)$$

mit der Lokalisierungslänge ξ_{loc} gegeben durch $\xi_{loc} \propto (E_F - E_m)^{-\nu}$ und dem kritischen Exponenten $\nu \simeq 1$ [63].

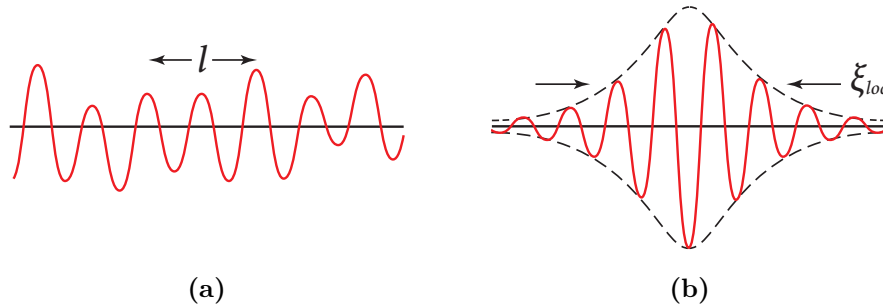


Abbildung 2.17 Typische Wellenfunktion eines (a) delokalisierten Zustands mit der mittleren freien Weglänge l , (b) lokalisierten Zustands mit der Lokalisierungslänge ξ_{loc} (nach [55]).

Ein Versuch, den MIT und Lokalisierung im Anderson-Modell zu verstehen, ist die Skalierungstheorie von Abrahams et al. [64]. Eine ausführliche Darstellung dieses Konzeptes würde zu weit führen, weshalb auf die einschlägige Literatur [55, 56] verwiesen wird. Eine Besonderheit besteht jedoch im Falle von zweidimensionalen Systemen. Gemäß dieser Theorie kann es in 2D bei $B = 0$ keine metallische Phase und damit auch keinen MIT geben. Das heißt, eine Verringerung der Temperatur führt stets zu einem logarithmischen („schwache Lokalisierung“) oder exponentiellen („starke Lokalisierung“) Anstieg des Widerstandes, der bei $T \rightarrow 0$ unendlich wird. Messungen in DMS-Systemen und neue theoretische Ansätze zeigen jedoch, dass diese Vorhersage nicht korrekt ist [56]. Vielmehr gilt diese Annahme lediglich für nicht-wechselwirkende Systeme. Nach aktueller Auffassung bildet sich beispielsweise in 2D bei nicht-magnetisch-dotierten Halbleitern eine metallische Phase aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung für $\sigma_{xx} \gg e^2/h$ aus [65].

2.5.1 Widerstandsmodell des Hopping Transports

Der Transport lokalisierter Ladungsträger, wie im Anderson-Modell beschrieben, erfolgt bei tiefen Temperaturen über die Hopping-Leitung. Dabei handelt es sich um einen quantenmechanischen Tunnelprozess. Anschaulich erklärt sind die Ladungsträger in den Potentialfluktuationen „gefangen“ und können sich nur durch „Hüpfen“ von einem Lokalisierungszentrum zum nächsten durch den Kristall bewegen. Man unterscheidet zwischen dem „Hüpfen“ zur benachbarten Störstelle (NNH¹⁵) und „Hüpfen“ zu Störstellen in unterschiedlichen Entfernungen (VRH¹⁶). Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes im Hopping-Regime lässt sich nach Mott [60] durch ein Exponentialgesetz beschreiben. Allgemein gilt:

$$\rho(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^x \right]. \quad (2.69)$$

Die Temperatur T_0 hängt von der Zustandsdichte $N(E)$ bei der Fermi-Energie E_F und der Lokalisierungslänge ξ_{loc} ab. In manchen Fällen zeigt der Vorfaktor ebenfalls eine Temperaturabhängigkeit, sodass ρ_0 durch $\rho_0 T^m$ ersetzt wird [66, 67]. Der Exponent x hängt von dem jeweilig vorherrschenden Hopping-Mechanismus ab. Im Falle des NNH wird $x = 1$ gesetzt, beim VRH spielt die Dimensionalität der Ladungsträgersbewegung eine Rolle. Für d -Dimensionen gilt $x = (d + 1)^{-1}$. Damit ergibt sich für ein zweidimensionales Lochgas das Mott-VRH:

$$\rho_{Mott,VRH}(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/3} \right]. \quad (2.70)$$

¹⁵Nearest neighbour hopping.

¹⁶Variable range hopping.

Berücksichtigt man zusätzlich noch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern, so nimmt die Zustandsdichte in der Nähe der Fermi-Energie ab und es entsteht eine Coulomb-Lücke [68]. Der Exponent ist dann $x = 1/2$ für alle Dimensionen und man erhält das Efros-Shklovskii(ES)-VRH:

$$\rho_{ES,VRH}(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.71)$$

2.5.2 Magnetfeld-induzierter Metall-Isolator-Übergang

Für nicht-magnetische Halbleiter gilt allgemein, dass ein magnetfeld-induzierter MIT lediglich bei sehr starken Magnetfeldern auftritt [69]. Eine phänomenologische Erklärung ermöglicht das Mott-Kriterium ([Gleichung 2.67](#)). Da das Magnetfeld den effektiven Bohr-Radius aufgrund des diamagnetischen Effektes verringert, wird beim Erhöhen des Magnetfeldes der kritische Wert durchschritten, es kommt zu einem Übergang und das Material wird isolierend [66].

Auf der anderen Seite ist für verdünnt-magnetische Halbleiter (wie (Hg,Mn)Te oder (Cd,Mn)Se [10, 70]) bekannt, dass ein magnetfeld-induzierter MIT in die entgegengesetzte Richtung auftritt. Das heißt, für ein steigendes Magnetfeld geht das Verhalten vom isolierenden zum metallischen über. Dafür sind zwei prinzipielle Mechanismen verantwortlich [66]:

Der erste beruht auf gebundenen magnetischen Polaronen (BMP¹⁷) und der destruktiven Wirkung von Magnetfeldern auf diese [53]. Ein Polaron besteht aus einem an eine Störstelle gebundenen Ladungsträger und einer ihn umgebenden Wolke aus Mn-Spins. Die magnetischen Ionen sind durch die s,p-d-Kopplung ausgerichtet. Durch die Bildung der BMPs verringert sich die Lokalisierungslänge ξ_{loc} . Dieser Effekt ist proportional zur magnetischen Suszeptibilität $\chi(T, H)$ [71, 72]. Daher führt das Anlegen eines äußeren Magnetfeldes in diesem Fall zu einer Ausdehnung des Bohr-Radius a_B [66], was wiederum, mit Hinweis auf das Mott-Kriterium, einen Isolator-Metall-Übergang initiieren kann. Anschaulich erklärt ([Abbildung 2.18](#)) müssen die BMPs bei Abwesenheit eines äußeren Feldes durch einen See mehr oder weniger zufällig ausgerichteter Mn-Spins „hüpfen“. Diese Bewegung erfordert das Umklappen vieler Spins, wodurch das Quasiteilchen unbeweglich wird. Mit zunehmender Polarisierung der Spins durch Anlegen eines Magnetfeldes wird die Kopplung zwischen Loch und Mn-Spins und damit das BMP zerstört. Die nun ungekoppelten Löcher sind beweglicher, was zu einem sinkenden Widerstand führt [73]. Die Anwendbarkeit der BMP-Theorie für (In,Mn)As wurde beispielsweise von Ohno et al. [74] vorgeschlagen.

Der zweite Mechanismus beruht auf der Spinaufspaltung in magnetischen Systemen aufgrund der s,p-d-Austauschwechselwirkung. Wie bereits im [Abschnitt 2.4](#) beschrieben, ist die Spinaufspaltung proportional zur Magnetisierung der Mn-Spins.

¹⁷Bound magnetic polaron.

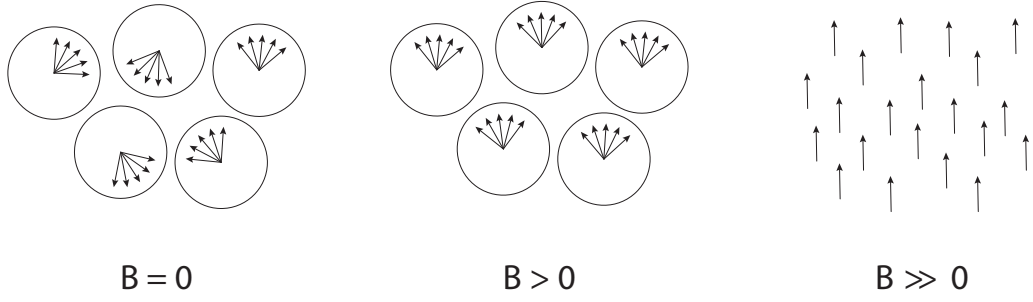


Abbildung 2.18 Schematische Darstellung der Situation beim BMP-Modell: Ohne angelegtes Feld sind die BMPs zufällig orientiert. Im Magnetfeld beginnen sie sich auszurichten. Für genügend große Magnetfelder ist die Kopplung aufgehoben und die BMPs zerstört. (nach [74])

Dadurch kommt es zur Umverteilung der Ladungsträger zwischen Spin-Teilbändern, das Fermi-Niveau wird angehoben und die kinetische Energie erhöht. Das führt zu einer verringerten Lokalisierungs-Neigung [75]. Dieser Effekt ist besonders ausgeprägt bei p-Typ DMS, da die Umverteilung der Löcher zwischen den Γ_8 -Subbändern aufgrund der p-d-Wechselwirkung mit dem Wechsel der transversalen Lochmasse von „schwer“ zu „leicht“ verknüpft ist [66].

Zusammengefasst ergibt sich, dass die Leitfähigkeit beim MIT mit der kritischen Ladungsträgerkonzentration n_c skaliert und die kritische Ladungsträgerkonzentration wiederum mit der magnetischen Suszeptibilität [76, 77]. Aufgrund dieser Argumentation schlagen Wurstbauer, Śliwa, et al. ein erweitertes Widerstandsmodell für Mn-dotierte zweidimensionale InAs-Systeme zur Beschreibung eines magnetfeldabhängigen Isolator-Metall-Übergangs vor [78, 79]. Ausgehend von Gleichung 2.69 gilt:

$$\rho(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{a \, dB_J(T,B)/dB}{T} \right)^\gamma \right]. \quad (2.72)$$

Hierbei ist $B_J(T, B)$ die Brillouin-Funktion für $J = 5/2$. Das Magnetfeld wird als senkrecht zum Quantentrog angenommen. Der Exponent γ ist in der Referenz ein Fitparameter und wird somit offen gelassen. Formal ähnlich schlagen Kaminski und Das Sarma [80] ein Widerstandsmodell proportional zur Brillouin-Funktion, statt zur Suszeptibilität vor. Eine genaue Erläuterung findet sich in Kapitel 4.

Ein weiteres Widerstandsmodell zur Beschreibung eines magnetfeld-induzierten MIT in DMS-Systemen liefern Wojtowicz et al. [70]. Oberhalb einer kritischen Magnetfeldstärke H_c gilt:

$$\sigma(T, H) = \sigma(0, H) + A(H)T^{1/2}, \quad (2.73)$$

wobei $\sigma(0, H) = \sigma_c(H/H_c - 1)^\nu$ ist. Der kritische Exponent ν kann als Fitparameter behandelt werden und ist zumeist $\nu \simeq 1$ [57]. Ausgangspunkt für die Gleichung ist die, durch eine Korrektur von Altschuler und Aronov [81] ergänzte, Boltzmann-

Transportfunktion [60]. [Gleichung 2.73](#) beschreibt dadurch jedoch nur den Leitfähigkeitsverlauf der metallischen Phase.

2.6 Der anomale Hall-Effekt

Der „klassische“ Hall-Effekt, in Abgrenzung zu anderen Hall-Effekten auch „ordinary Hall effect“ (OHE) genannt, beschreibt das Auftreten einer Querspannung in einem zur Stromrichtung senkrecht stehendem Magnetfeld B . Ursache dafür ist die Lorentz-Kraft, die Ladungsträger senkrecht zur Bewegungsrichtung und Magnetfeld ablenkt. Dadurch kommt es auf einer Seite des durchgeflossenen Leiters zu einem Elektronenüberschuss, auf der Gegenseite zu einem Elektronenmangel. Dies führt zum Ausbilden eines elektrischen Feldes E , welches der Lorentz-Kraft entgegenwirkt. Durch das Kräftegleichgewicht kann der Strom geradlinig fließen. Die entstandene Ladungstrennung auf den Seiten kann als Hall-Spannung U_{xy} abgegriffen werden. Eine nähere Beschreibung im Bild des Drude-Modells ist in [Abschnitt 2.1.4](#) zu finden.

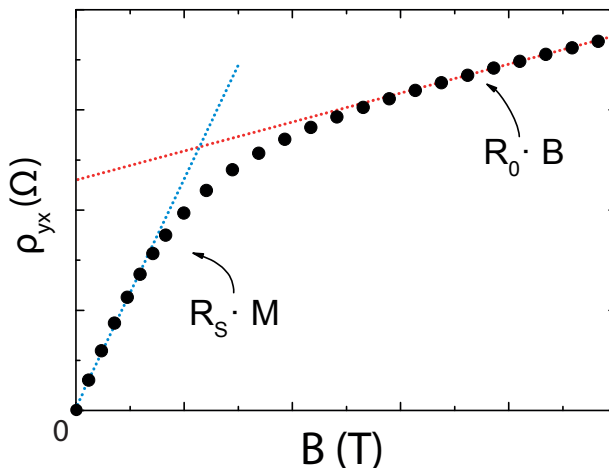


Abbildung 2.19 Schematisches Verhalten eines magnetischen Materials unter dem Einfluss eines externen Magnetfeldes. Der Widerstandsverlauf kann in zwei Anteile zerlegt werden. Durch Extrapolation des Hochfeld-Bereiches zu $B = 0$ (rote Kurve) erhält man den gesättigten anomalen Anteil des Hall-Widerstandes.

Der Hall-Effekt eines Materials mit magnetischen Einschlüssen unterscheidet sich grundlegend von dem eines nicht-magnetischen Materials. Der lineare Zusammenhang zwischen Hall-Widerstand und Magnetfeld ist nicht mehr gegeben und man spricht vom anomalen Hall-Effekt (AHE). Allgemein gesprochen findet man den AHE in Festkörpern mit gebrochener zeitlicher Inversions-Symmetrie als Konsequenz der Spin-Bahn-Wechselwirkung (siehe auch [Abschnitt 2.3.2](#)). Im Folgenden wird ein Überblick über die Phänomenologie des anomalen Hall-Effekts gegeben und in Grundzügen die ursächlichen Mechanismen dargestellt. Im letzten Abschnitt werden das Skalierungsverhalten und die dominierenden Mechanismen für verschiedene Materialklassen vorgestellt.

In [Abbildung 2.19](#) ist der typische Verlauf des Hall-Widerstandes magnetischer Materialien als Funktion des Magnetfeldes skizziert. Das Verhalten kann nicht mehr

mit der Lorentz-Kraft erklärt werden. Bereits 1930 wurde empirisch gezeigt, dass der Hall-Widerstand in zwei Teile zerlegt werden kann [82]:

$$\rho_{yx} = R_0 B + R_S M . \quad (2.74)$$

Demnach setzt sich der Hall-Widerstand aus einem zum Magnetfeld \vec{B} proportionalen Anteil mit dem Hall-Koeffizienten R_0 (OHE) und einem zur Magnetisierung \vec{M} proportionalen Anteil mit dem anomalen Hall-Koeffizienten R_S (AHE) zusammen. Über R_S ist der Hall-Widerstand ρ_{yx} mit dem Längswiderstand ρ_{xx} verknüpft. Der Koeffizient kann dabei sowohl positiv als auch negativ sein. Es gilt allgemein:

$$R_S(\rho_{xx}) = \sum_i c_i \rho_{xx}^{\gamma_i} \quad (2.75)$$

wobei i über alle relevanten Beiträge zum AHE läuft und γ_i der jeweils zugehörige charakteristische Exponent und c_i eine materialabhängige Konstante ist (siehe [Abschnitt 2.6.1](#)). Bei der Behandlung des anomalen Hall-Effekts ist es oft zweckmäßig, die Hall-Leitfähigkeit anzugeben. Aus [Gleichung 2.18](#) berechnen sich die Längs- σ_{xx} und (anomale) Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} zu:

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{yx}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{xy} = \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{yx}^2} . \quad (2.76)$$

Gilt $\rho_{yx} \ll \rho_{xx}$, vereinfachen sich die Gleichungen zu $\sigma_{xx} = \rho_{xx}^{-1}$ und $\sigma_{yx} = \rho_{yx}/\rho_{xx}^2$. Damit wird [Gleichung 2.75](#) zu

$$R_S(\sigma_{xx}) = \sum_i c_i \sigma_{xx}^{\alpha_i} \quad (2.77)$$

mit $\alpha_i = 2 - \gamma_i$. In der Regel dominiert der anomale Anteil bei kleinen Magnetfeldern. Bei hohen Magnetfeldern ist die Magnetisierung gesättigt ($M = M_S$) und der Hall-Widerstand nimmt einen linearen Verlauf an. Eine einfache Methode zur Ermittlung des anomalen Anteils ρ_{yx}^{AHE} ist daher eine lineare Extrapolation zu $B = 0$, ausgehend vom linearen Bereich¹⁸, wie in [Abbildung 2.19](#) durch die rote Kurve illustriert. Aus verschiedenen Gründen erfordert unser System ein anderes Vorgehen, welches in [Abschnitt 5.2](#) näher dargestellt wird.

2.6.1 Theoretische Beschreibung

Obwohl der gewöhnliche (1879) und der anomale (1881) Hall-Effekt [21, 22] beinahe zeitgleich entdeckt wurden, bleibt letzterer auch nach über einem Jahrhundert

¹⁸Man betrachtet den linearen Anteil bei Magnetfeldwerten, die höher sind als die zur Magnetisierungssättigung notwendigen.

ein nicht vollkommen verstandenes und rege diskutiertes Phänomen [24]. Eine erste theoretische Beschreibung lieferten Karplus und Luttinger im Jahr 1954 [23]. Sie zeigten, dass die Spinaufspaltung der Bänder unter Einfluss der Spin-Bahn-Kopplung zu einem zusätzlichen Hall-Beitrag führt. Smit entgegnete einige Jahre später, dass das Potential der Störstellen in der KL-Theorie nicht berücksichtigt wurde. Das würde allerdings dazu führen, dass der zusätzliche Beitrag verschwindet. Er propagierte stattdessen den „Skew-Scattering“-Mechanismus, bei dem es zu einer asymmetrischen Streuung aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung kommt [83]. Im Jahr 1970 wurde von Berger ein weiterer Ansatz zur Erklärung des anomalen Hall-Effekts vorgeschlagen [84]. Der „Side-Jump“ genannte Mechanismus beschreibt einen transversalen Versatz der Elektronenbahn bei einem Streuereignis. In neuerer Zeit führte die theoretische Neubetrachtung des Konzepts von Karplus und Luttinger im Bild der Berry-Phase elektronischer Wellenfunktionen zu einer Neubelebung des intrinsischen, d. h. störstellenunabhängigen, Beitrages [85–88]. Diese drei Mechanismen werden nach jetzigem Stand allgemein als die Hauptursache für die Entstehung des anomalen Hall-Effekts akzeptiert. Eine anschauliche Vorstellung ermöglicht die [Abbildung 2.20](#).

Der AHE ist immer die Konsequenz eines Zusammenspiels mehrerer Beiträge. Die folgende, detaillierte Betrachtung der Mechanismen nach [24] ermöglicht im Anschluss eine Einteilung in Materialklassen, denen ein bestimmtes Skalierungsverhalten des AHE und dominierende Beiträge zugeordnet werden können.

Intrinsischer Beitrag und Berry-Phase

Die erste theoretische Beschreibung des AHE durch Karplus und Luttinger (KL-Theorie) [23] berücksichtigte explizit nur die Spin-Bahn-Wechselwirkung der Elektronen und das periodische Gitterpotential V . Daher wird dieser Beitrag als intrinsisch bezeichnet, da es von Störstellen unabhängig ist. Karplus und Luttinger zeigten, dass Elektronen unter Anwesenheit der Spin-Bahn-Kopplung $H_{SO} = (1/4m^2c^2) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla V \times \mathbf{p})$, mit dem Vektor der Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Impulsoperator \mathbf{p} , einen zusätzlichen Beitrag zur Gruppengeschwindigkeit erhalten, wenn sie einem äußeren elektrischen Feld \mathbf{E} ausgesetzt sind.¹⁹ Da der Vektor der anomalen Geschwindigkeit senkrecht zu \mathbf{E} steht, liefert er einen zusätzlichen Beitrag zum Hall-Effekt [24].

Die Neuinterpretation der KL-Theorie im Bild der Berry-Phase [89] regte in den letzten Jahren eine wachsende Forschungstätigkeit auf diesem Gebiet an und hält seitdem in immer mehr Bereichen der Festkörperphysik Einzug [90, 91]. Mittlerweile wird von vielen Forschern der intrinsische Beitrag in magnetischen Materialien mit starker Spin-Bahn-Kopplung, wie zum Beispiel DMS, als die dominierende Ursache für den AHE angesehen [12, 24, 88]. Zur Vertiefung der Berry-Phasen-Theorie im Rahmen einer quantenmechanischen Betrachtung eignet sich [92, 93]. Der folgende theoretische Überblick orientiert sich an den Arbeiten von [24, 61, 86].

¹⁹Einheiten sind so gewählt, dass $\hbar = 1$.

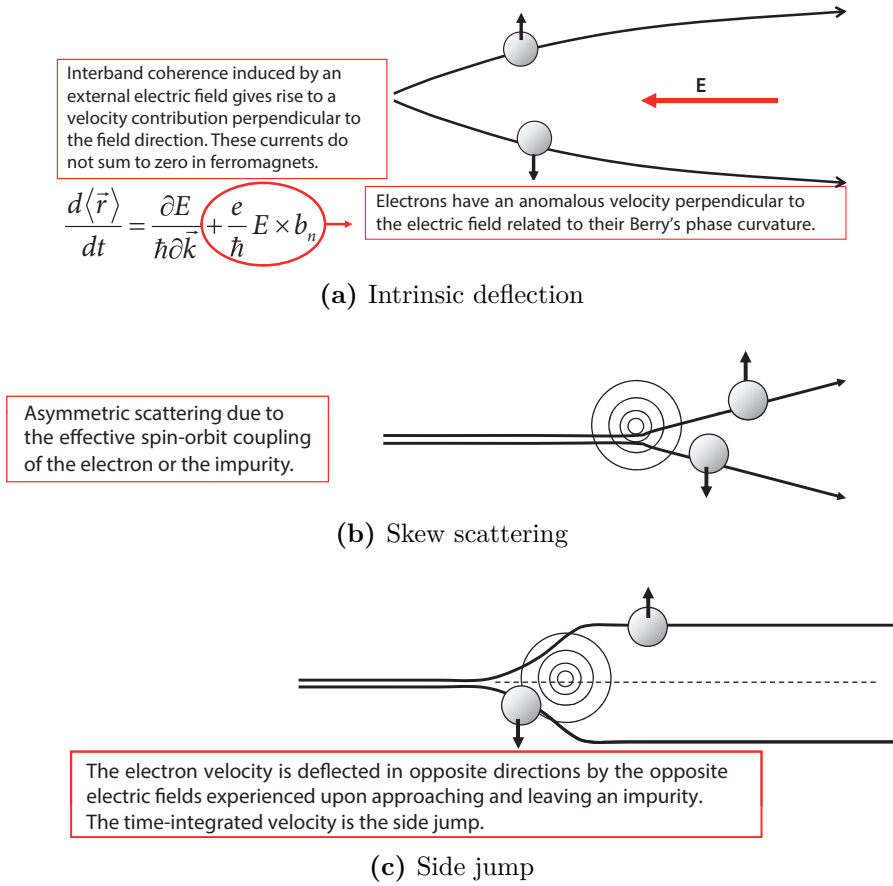


Abbildung 2.20 Illustration der drei Hauptmechanismen, die zum anomalen Hall-Effekt führen. In realen Materialien ist die Beeinflussung der Ladungsträgerbewegung stets ein Zusammenspiel all dieser Beiträge (aus [24]).

Zugrunde liegt ein quantenmechanisches System, das über einen f -dimensionalen Parameter $\boldsymbol{\lambda}(t)$ von der Zeit abhängt. In unserem konkreten Fall ist $f = 3$ und der Parameterraum entspricht dem reziproken k -Raum. Es wird die zeitliche Entwicklung des Systems, beschrieben durch den Hamilton-Operator $H = H(\boldsymbol{\lambda})$, bei einer adiabatischen Änderung des Parameters $\boldsymbol{\lambda}$ betrachtet. Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\boldsymbol{\lambda}) |\psi(t)\rangle . \quad (2.78)$$

Bei adiabatischer Zeitentwicklung gilt für die Eigenwertgleichung:

$$H(\boldsymbol{\lambda}(t)) |n(\boldsymbol{\lambda}(t))\rangle = E_n(\boldsymbol{\lambda}(t)) |n(\boldsymbol{\lambda}(t))\rangle \quad (2.79)$$

mit den orthonormierten Basiszuständen $|n(\boldsymbol{\lambda}(t))\rangle$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das System im Eigenzustand $|\psi(t = 0)\rangle = |n(\boldsymbol{\lambda}(t = 0))\rangle$. Nach dem Adiabatensatz der Quantenmechanik setzt man zur Lösung der [Gleichung 2.78](#) an:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(i\gamma_n(\boldsymbol{\lambda})) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\gamma(t')) dt'\right) |n(\boldsymbol{\lambda}(t))\rangle . \quad (2.80)$$

Der Vorfaktor $\exp(i\gamma_n(\boldsymbol{\lambda}))$ stellt eine zusätzliche Phase dar. Berry konnte nachweisen, dass der Exponent γ_n nach einem zyklischen Umlauf im Parameterraum einen von Null verschiedenen Wert annehmen kann. Der Ausdruck wird daher als Berry-Phase bezeichnet. Der Wert hängt von der geschlossenen Kurve Γ ab, die vom Parameter λ im Phasenraum überstrichen wird. Durch Einsetzen der [Gleichung 2.80](#) in [Gleichung 2.78](#) und Projektion auf $\langle n(\boldsymbol{\lambda}(t)) |$ folgt die Bewegungsgleichung der Berry-Phase:

$$\dot{\gamma}_n(t) = i \langle n(\boldsymbol{\lambda}(t)) | \dot{n}(\boldsymbol{\lambda}(t)) \rangle . \quad (2.81)$$

Nach einem zyklischen Umlauf ergibt sich für die Berry-Phase:

$$\gamma_n(\Gamma) = i \oint_{\Gamma} \langle n(\boldsymbol{\lambda}) | \nabla_{\lambda} | n(\boldsymbol{\lambda}) \rangle d\boldsymbol{\lambda} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \quad (2.82)$$

mit der sogenannten „Berry connection“

$$\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) = i \langle n(\boldsymbol{\lambda}) | \nabla_{\lambda} | n(\boldsymbol{\lambda}) \rangle . \quad (2.83)$$

Mittels des Satzes von Stokes kann das Kurvenintegral umgeschrieben werden:

$$\gamma_n(\Gamma) = \int_S \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{\lambda}) d^2\lambda \quad (2.84)$$

mit der eingeschlossenen Fläche S und der „Berry curvature“

$$\boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\lambda} \times \mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) = i \langle \nabla_{\lambda} n(\boldsymbol{\lambda}) | \times | \nabla_{\lambda} n(\boldsymbol{\lambda}) \rangle . \quad (2.85)$$

Ein anschauliches Verständnis der Berry-Phase ermöglicht die Betrachtung eines Vektors beim Paralleltransport auf einer Kugel ([Abbildung 2.21](#)). Der Vektor, der sich jederzeit in der Tangentialebene der Kugel befindet, startet am Nordpol und bewegt sich entlang eines Längengrades bis zum Äquator, danach entlang des Äquators und anschließend erneut entlang des Längengrades zum Nordpol zurück. Nach dieser geschlossenen Kurve schließt der „Endvektor“ mit der ursprünglichen Vektorrichtung einen Winkel θ ein.²⁰ In der Analogie entspricht dieser Winkel der Berry-Phase, die daher auch geometrische Phase genannt wird. Der eingeschlossene Winkel beim Paralleltransport eines Tangentialvektors wird durch die Krümmung der Fläche bestimmt. Formal ähnlich, ist die Berry-Phase ein Maß für die Krümmung der Fermi-Fläche im k -Raum.

²⁰Das ist der sogenannte „Anholonomie-Winkel“.

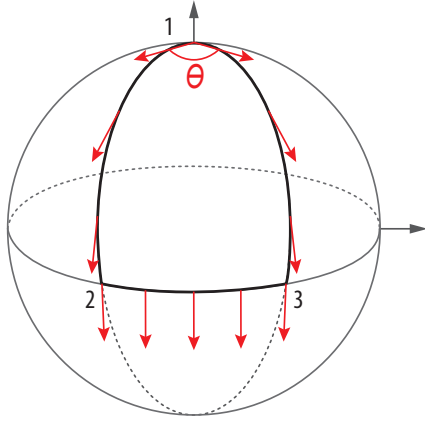


Abbildung 2.21 Paralleltransport eines Vektors auf einer Kugeloberfläche von (1) über (2) und (3) nach (1). Der transportierte Vektor schließt mit dem anfänglichen Vektor einen Winkel $\Theta \neq 0$ ein.

Der Einfluss der Berry-Krümmung auf die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen in einem periodischen Gitterpotential wird in [61] ausführlich dargestellt und hier verkürzt diskutiert. In einem perfekten Kristall ist die Wellenfunktion eines Elektrons in einem Band mit Index n nach dem Bloch-Theorem gegeben durch:

$$|\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})\rangle = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}|u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})\rangle . \quad (2.86)$$

Die Funktion $|u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})\rangle$ berücksichtigt das periodische Gitterpotential. Die Bewegung der Ladungsträger wird durch ein Wellenpaket, bestehend aus Bloch-Wellenfunktionen, beschrieben. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen ist in [86] zu finden. Sie lauten:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial E_n}{\partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_n , \quad (2.87)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (2.88)$$

Die Gruppengeschwindigkeit $v(\mathbf{k}) = \dot{\mathbf{r}}$ eines Wellenpaketes im periodischen Gitterpotential unter Einwirkung eines elektrischen Feldes \mathbf{E} weist einen zusätzlichen Geschwindigkeitsbeitrag auf, der senkrecht zu dem Feld orientiert ist. Nach den Gleichungen 2.83, 2.84 und 2.85 gilt außerdem:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = i\langle n(\mathbf{k})|\nabla_{\mathbf{k}}|n(\mathbf{k})\rangle , \quad (2.89)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) , \quad (2.90)$$

$$\gamma(\mathbf{k}) = \int \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) d^2k . \quad (2.91)$$

Nur in Festkörpern in denen die zeitliche Inversions-Symmetrie durch ein Magnetfeld gebrochen wird oder in Kristallen ohne Inversionszentrum ist $\boldsymbol{\Omega}_n \neq 0$. Das trifft auf

ferromagnetische oder (III-V)-Halbleiter, wie z. B. (In,Mn)As, zu. Die Summe der transversalen Geschwindigkeitsbeiträge über alle besetzten Zustände ergibt nach [61] den intrinsischen Beitrag zur Hall-Leitfähigkeit:

$$\sigma_{xy}^{Berry} = -\frac{e^2}{(2\pi)^3\hbar} \sum_n \int d^3k f_{n0}(\mathbf{k}) \Omega_n(\mathbf{k}) . \quad (2.92)$$

Dabei ist f_{n0} die Fermi-Verteilungsfunktion des n -ten Bandes im Gleichgewicht. Die Integration erfolgt über die erste Brillouin-Zone. Der Berry-Beitrag ist unabhängig von der Transportstreuzeit τ , woraus folgt, dass

$$\sigma_{xy}^{Berry} \sim const. \quad \text{bzw.} \quad \rho_{yx}^{Berry} \propto \rho_{xx}^2 . \quad (2.93)$$

Skew-Scattering

Der Skew-Scattering-Mechanismus ist der einzige Beitrag, der im Rahmen der semiklassischen Boltzmann-Gleichung beschrieben werden kann. Einer der Grundsätze, auf die sich diese Theorie beruft, ist der des „detailed balance“ für Systeme im Gleichgewicht. Dieses Prinzip liegt vor, wenn für einen Prozess nicht erkennbar ist, ob er sich zeitlich rückwärts oder vorwärts bewegt. Das bedeutet, dass die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{n \rightarrow m}$ vom Zustand n in den Zustand m gleich der Übergangswahrscheinlichkeit $W_{m \rightarrow n}$ in die entgegengesetzte Richtung ist. Das gilt beispielsweise für Fermis Goldene Regel unter dem Einfluss einer Störung V :

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|V|m \rangle|^2 \delta(E_n - E_m) . \quad (2.94)$$

Jedoch ist dieses Prinzip nicht generisch. Das Matrixelement des Störstellenpotentials unter Einfluss der Spin-Bahn-Kopplung ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{k}' s' | V | \mathbf{k}, s \rangle = \tilde{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left(\delta_{s, s'} + \frac{i\hbar^2}{4m^2 c^2} (\langle s' | \boldsymbol{\sigma} | s \rangle) \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \right) . \quad (2.95)$$

Hierbei ist \mathbf{k} bzw. \mathbf{k}' der Wellenvektor der einlaufenden respektive gestreuten Welle und $\boldsymbol{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen. Berechnungen der Hall-Leitfähigkeit ergeben bereits unter Zuhilfenahme der zweiten Born-Näherung [24] unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten. Das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts ist gebrochen. In einem vereinfachten Modell kann das Skew-Scattering in einem asymmetrischen Anteil der Übergangswahrscheinlichkeit beschrieben werden:

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^A = -\tau_A^{-1} \mathbf{k} \times \mathbf{k}' \cdot \mathbf{M}_s \quad (2.96)$$

mit dem Vektor der Sättigungsmagnetisierung \mathbf{M}_s und der Transportstreuzeit²¹ der

²¹Die Zeit zwischen zwei Streueignissen

Bloch-Zustände τ . Unter Berücksichtigung dieses Anteils ist die Übergangswahrscheinlichkeit $W(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$ nicht gleich $W(\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k})$. Die Streuung eines Ladungsträgers führt zu einem Impuls, der senkrecht zum Wellvektor \mathbf{k} der einfallenden Welle und zur Magnetisierung \mathbf{M} steht. Das führt zu einem transversalen Strom, der proportional zu demjenigen ist, der durch das angelegte elektrische Feld \mathbf{E} erzeugt wird (Abbildung 2.22(a)). Daher ist der Skew-Scattering-Anteil am anomalen Hall-Widerstand proportional zum Längswiderstand:

$$\rho_{yx}^{skew} \propto \rho_{xx} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{xy}^{skew} \propto \sigma_{xx} . \quad (2.97)$$

Da die Leitfähigkeit σ_{xx} und damit auch der Skew-Scattering-Beitrag proportional zur Transportstreuzeit τ sind, dominiert dieser Mechanismus in perfekten Kristallen. [24, 94]

Side jump

Das sogenannte „Side-Jump-Scattering“ wurde erstmals im Jahr 1970 durch Berger [84] als Erklärungsansatz für den AHE vorgeschlagen. Der transversale Geschwindigkeitsbeitrag entsteht hier durch einen seitlichen Versatz Δy des elektronischen Wellenpaketes bei der Streuung an einer Störstelle, der nur quantenmechanisch begründbar ist. Man betrachtet als Streuzentrum eine sphärische Potentialsenke mit dem Radius R , gegeben durch

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - k_1^2) & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases} \quad (2.98)$$

und unter Anwesenheit des Spin-Bahn-Terms H_{SO}

$$H_{SO} = \frac{r^{-1}}{2m^2c^2} \frac{\partial V}{\partial r} S_z L_z \quad (2.99)$$

mit den z-Komponenten des Spin- S_z und Bahndrehimpulses L_z . Der transversale Versatz eines Wellenpaketes zum Wellenvektor k ist nach Berger gegeben durch:

$$\Delta y = \frac{1}{6} k \lambda_c^2 . \quad (2.100)$$

Hierbei ist $\lambda_c = \hbar/mc$ die Compton-Wellenlänge. Interessanterweise ist die Versetzung weder von der Störstellendichte, noch von der Störstellenart abhängig. Bei für Metalle typischen Werten von $k \cong k_F \cong 10^{10} \text{ m}^{-1}$ ist $\Delta y \cong 3 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1}$ allerdings viel zu klein, um einen beobachtbaren Effekt zu erzeugen. In Festkörpern ist die Spin-Kopplung jedoch durch Bandstruktur-Effekte deutlich erhöht. Das führt zu einem Anstieg des Versatzes auf eine Größenordnung von $\Delta y \simeq 0,8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, wodurch er für den AHE relevant wird. Der Side-Jump-Beitrag zum transversalen

Widerstand ist das Produkt aus der Streurrate und der Versetzung pro Störstelle (Abbildung 2.22(b)). Daraus leitet sich für den Side-Jump ein quadratischer Zusammenhang mit dem Längswiderstand ab:

$$\rho_{yx}^{sj} \propto \rho_{xx}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{xy}^{sj} \sim \text{const.} \quad (2.101)$$

Das entspricht dem gleichen Zusammenhang wie beim intrinsischen Beitrag, wodurch die experimentelle Trennung der beiden Beiträge äußerst schwierig ist. Da dieser Beitrag unabhängig von der Leitfähigkeit σ_{xx} ist, ist es auch von der Transportstreuzeit τ unabhängig²² [24].

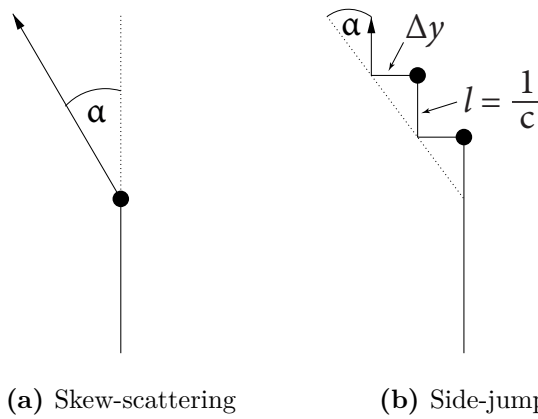


Abbildung 2.22 Schematische Darstellung der extrinsischen Beiträge zum AHE. Die Bewegungsrichtungen vor und nach der Streuung schließen den Hall-Winkel $\alpha = \rho_{yx}/\rho_{xx}$ ein. Der Side-jump-Beitrag hängt von der Versetzung Δy und von der Störstellenkonzentration c ab (aus [95]).

2.6.2 Leitfähigkeitsregime und Skalierung des AHE

Durch zahlreiche theoretische Berechnungen und Messungen gilt es als gesichert, dass der anomale Hall-Effekt in mindestens drei Leitfähigkeitsregime unterteilt werden kann. Dabei hängt die anomale Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} charakteristisch von der Längsleitfähigkeit σ_{xx} ab [24]:

- (i) „*High conductivity regime*“, [$\sigma_{xx} > 10^6 (\Omega \text{ cm})^{-1}$]:

Bereich hoher Leitfähigkeit, bei der das Skew-Scattering dominiert ($\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}$) und der anomale Hall-Winkel $\sigma_{xy}^{AHE}/\sigma_{xx}$ konstant ist. Dieses Verhalten zeigen unter anderem hochreine Nickelproben bei tiefen Temperaturen [96] und verschiedene hochrein-gewachsene Eisenlegierungen [97, 98].

²²Es gilt allgemein eine τ^0 -Abhängigkeit

- (ii) „*Good-metal regime*“, $[10^4 (\Omega \text{ cm})^{-1} < \sigma_{xx} < 10^6 (\Omega \text{ cm})^{-1}]$:

Intrinsischer bzw. streuunabhängiger Bereich, in dem die anomale Hall-Leitfähigkeit annähernd unabhängig von σ_{xx} ist ($\sigma_{xy}^{AHE} \sim \text{const.}$). In diesem „intermediate regime“ wird angenommen, dass der intrinsische Mechanismus dominiert. Dies deuten Experimente und einige Modell-Rechnungen an [12, 24, 99–104]. Allerdings herrscht noch kein tieferes Verständnis über die Gültigkeitsgrenzen dieser Annahme. Dieses Skalierungsverhalten ist bei einkristallinem Eisen, dünnen Eisen-, Cobalt und Nickelfilmen [105] und metallischem (Ga,Mn)As [99, 106] zu finden.

- (iii) „*Bad-metal-hopping regime*“, $[\sigma_{xx} < 10^4 (\Omega \text{ cm})^{-1}]$:

Bereich geringer Leitfähigkeit, bei der die Skalierungsrelation $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^\alpha$, mit $1,6 < \alpha < 1,8$ gilt. Dieses Skalierungsverhalten findet sich in einer Reihe von Materialsystemen, verteilt über einen großen Leitfähigkeitsbereich [107]. Beispiele sind (Ga,Mn)As [108, 109], (Ti,Co)O₂ [110], epitaktisch-gewachsenes Fe auf MgO (1,3 - 2,5 nm) [111] und polykristallines (Fe,Zn)O₄ [112]. Bemerkenswert ist die Universalität des Skalierungsexponenten. Nicht nur schlecht leitende Metalle, sondern auch Systeme mit schwacher Lokalisierung²³ und Isolatoren, die dem Regime der starken Lokalisierung zuzuordnen sind, zeigen dieses Verhalten [24].

Zur Veranschaulichung der Skalierungsregime ist in [Abbildung 2.23](#) die anomale Hall-Leitfähigkeit verschiedener ferromagnetischer Materialien als Funktion der Längsleitfähigkeit dargestellt. Zum jetzigen Zeitpunkt fehlt noch eine Theorie, die das Skalierungsverhalten in allen Regimen und Transportarten erklären kann [24]. Einen Ansatz für eine vereinheitlichte Theorie für Ferromagneten mittels einer quantenmechanischen Transporttheorie für Multiband-Systeme haben Onoda et al. entwickelt [100, 113]. Hierbei wird σ_{xy}^{AHE} , aufbauend auf dem Keldysh-Formalismus, mittels der selbstkonsistenten T-Matrix-Näherung (TMA²⁴) berechnet. Eine numerische Analyse zeigt drei Leitfähigkeitsregime passend zu den empirischen Erkenntnissen. Im superreinen Grenzfall dominiert hierbei das Skew-Scattering. Mit zunehmender Unordnung, d. h. abnehmender Transportstreuzeit τ , wird das Skew-Scattering unterdrückt und das System geht bei moderater Unordnung in das intrinsische Regime über. Sind die Störstellen repulsiv ($V > 0$), weisen das Skew-Scattering und der intrinsische Mechanismus entgegengesetzte Vorzeichen auf. Dadurch wird der Übergang von einem Vorzeichenwechsel von σ_{xy}^{AHE} begleitet [114]. Bei einer weiteren Abnahme der Transportstreuzeit geht das System schließlich in das Skalierungsregime $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$ über. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen, die sich aus dieser Theorie ergeben, sind in [Abbildung 2.23](#) (—) mit dem Vermerk „This theory“ gekennzeichnet. Nach Onoda et al. liegt der intrinsische Bereich bei $\sigma_{xy}^{AHE} \sim e^2/h$ (2D) und $\sigma_{xy}^{AHE} \sim e^2/ha$ (3D), wobei a die Gitterkonstante ist. Das ergibt bei einer

²³Inkoherentes Regime [24].

²⁴Self-consistent T-matrix approximation.

typischen Gitterkonstante von $a \sim 5 \text{ \AA}$ einen Wert von $\sigma_{xy}^{AHE} \sim 10^3 (\Omega\text{cm})^{-1}$ (siehe [Abbildung 2.23](#) (---)). Wichtig ist die Tatsache, dass das Modell keinen Hopping-Transport berücksichtigt und dadurch auch keine Erklärung für die Skalierungsrelation bei stark lokalisierten Systemen darstellt [24].

Einen Ansatz zur Beschreibung des AHE im Hopping-Regime, unter Berücksichtigung der Berry-Phase, geben die theoretischen Berechnungen von Burkov und Balents [115]. Sie basieren auf einer modifizierten Theorie Holsteins [116]. Damit konnte das isolierende Verhalten ($\rho_{yx}^{AHE} \rightarrow \infty$ wenn $\rho_{xx} \rightarrow \infty$) ferromagnetischer (Ga,Mn)As-Proben gezeigt werden, allerdings nicht die beobachtete Skalierungsrelation. Aufbauend auf diese Arbeit entwickelten Liu et al. [117], mit Hilfe der Perkolations-theorie, einen Erklärungsansatz für die Skalierung im Hopping-Regime. Sie konnten zeigen, dass im Falle von Mott-VRH der Exponent $1,38 < \alpha < 1,76$ ist. Ähnliche Werte ergaben sich für das Efros-Shklovskii-VRH mit $1,33 < \alpha < 1,62$. Damit sind die Ergebnisse mit den allgemeinen experimentellen Befunden konsistent. Die Analyse des Modells ergab zudem, dass die anomale Hall-Leitfähigkeit einen Vorzeichenwechsel erfährt, wenn die erste oder dritte Ableitung der Zustandsdichte nach der Energie, ebenfalls einen Vorzeichenwechsel aufweist. Das ergibt sich aus

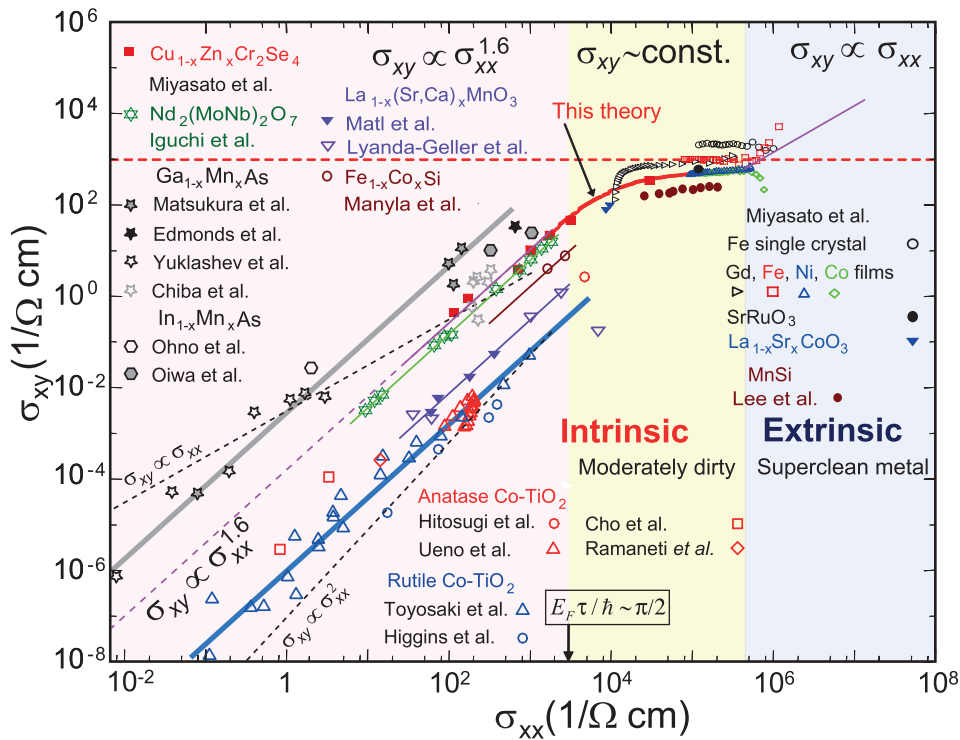


Abbildung 2.23 Zusammenfassung experimenteller Befunde zum Skalierungsverhalten des AHE: Anomale Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} als Funktion der Längsleitfähigkeit σ_{xx} für verschiedene ferromagnetische Materialien. Die verschiedenen Linien repräsentieren das Skalierungsverhalten im „Clean“- ($\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}$), „Intermediate“- ($\sigma_{xy}^{AHE} \sim \text{const.}$) und „Dirty“-Regime ($\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1.6}$). Weitere Erklärungen finden sich im Fließtext (aus [100]).

der Abschätzung für das untere und obere Limit von σ_{xy}^{AHE} [117]. Auch Burkov und Balents erwarten einen Vorzeichenwechsel, wenn das Fermi-Level das Maximum der Zustandsdichte durchschreitet [115], was einem Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung entspricht.

Tian et al. [118] schlagen im Rahmen ihrer Arbeit an epitaktisch-dünnen Fe-Filmen einen neuen Skalierungsansatz durch Berücksichtigung der Phononen-unabhängigen Restleitfähigkeit vor:

$$\sigma_{xy}^{AHE} = - \left(\alpha \sigma_{xx0}^{-1} + \beta \sigma_{xx0}^{-2} \right) \sigma_{xx}^2 - b . \quad (2.102)$$

Hierbei sind σ_{xx0} die Restleitfähigkeit bei $T = 0$ und die Parameter α , β und b die jeweiligen Vorfaktoren zu den Skew-Scattering-, Side-Jump- und intrinsischen Beiträgen. Eine theoretische Untermauerung erfährt die Gleichung durch Shitade und Nagaosa [119], die unter Berücksichtigung der elastischen und inelastischen Streuung an Störstellen mit einem Multiband Tight-Binding Modell die Gültigkeit für die Leitfähigkeitsbereiche (ii) und (iii) zeigen konnten. Aus der numerischen Analyse geht auch hervor, dass der Side-Jump-Beitrag geringer als die übrigen Beiträge ist und der Skew-Scattering-Beitrag durch eine Zunahme der inelastischen Streuung effektiv unterdrückt wird, wohingegen der intrinsische Beitrag robust gegenüber dieser Streuung ist. Wichtig ist auch hier die Bemerkung, dass dieses Modell den Hopping-Transport nicht berücksichtigt.

Ausgehend von den beschriebenen und weiteren Modellen und unter Berücksichtigung der inelastischen Streuung schlagen Nagaosa et al. [24] ein spekulatives Phasendiagramm (Abbildung 2.24) vor. Das Diagramm beschreibt verschiedene Regime des AHE, die durch den Temperatur- und Leitfähigkeitsbereich charakterisiert werden.

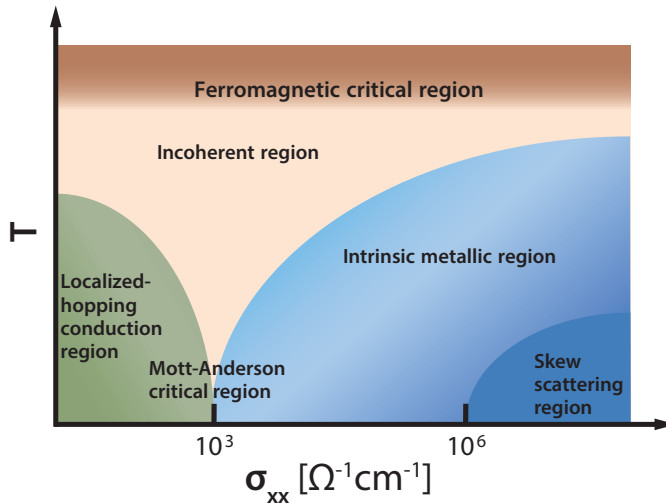


Abbildung 2.24 Spekulatives Phasendiagramms des anomalen Hall-Effekts, beschrieben durch Temperatur T und Leitfähigkeit σ_{xx} (aus [24]).

3 Probenherstellung und Messtechnik

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Mangan(Mn)-dotierte Heterostrukturen untersucht, bestehend aus den III-V-Verbindungshalbleitern Indiumarsenid (InAs), Galliumarsenid (GaAs), Aluminiumarsenid (AlAs) und ihren ternären Verbindungen InGaAs und InAlAs. Zur Durchführung von präzisen Magnetotransportmessungen an diesen Halbleitern werden ein definierter Strompfad mit definierten Spannungsabgriffen sowie tiefe Temperaturen und hohe Magnetfelder benötigt.

Das folgende Kapitel beschreibt das Ausgangsmaterial und alle nötigen Schritte zur Herstellung von Proben in einer Hall-Geometrie und gibt einen Überblick über die Tieftemperaturmessplätze, mit denen die nötigen Temperaturen und Magnetfelder erzeugt werden können. Eine typische Probe zeigt [Abbildung 3.1](#).

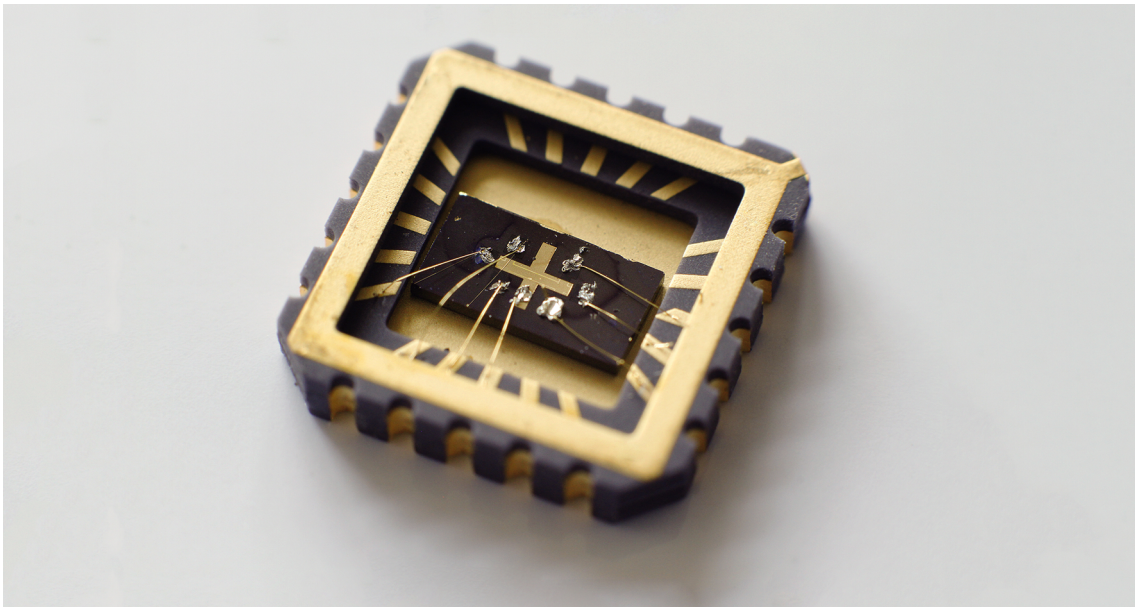


Abbildung 3.1 Gebondete Halbleiter-Probe mit Hall-Bar-Struktur, Topgate und InZn-Kontakten in einem Standard 20-Pin Chipcarrier.

3.1 Ausgangsmaterial

3.1.1 Materialeigenschaften von InAs:Mn

Das untersuchte Material basiert auf dem III-V-Verbindungshalbleiter InAs und Mn als Dotieratom. InAs kristallisiert durch eine unvollständige sp^3 -Hybridisierung in der Zinkblendestruktur ([Abbildung 3.2](#)). Hierbei handelt es sich um zwei kubisch-flächenzentrierte (fcc¹) Gitter für In und As, die um $\frac{1}{4}a(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$ verschoben sind. InAs weist eine kleine Bandlücke von $E_g = 0,417 \text{ eV}$ und eine starke Spin-Bahn-Wechselwirkung auf. Der g-Faktor in „Bulk“-InAs beträgt $|g| = 14,8$ [[120](#)].

Wird Indium im Kristallgitter teilweise durch magnetische Atome, in diesem Fall Mn, ersetzt, entsteht ein sogenannter verdünnt-magnetischer Halbleiter (DMS²). Mn besitzt die Elektronenkonfiguration $[\text{Ar}]3d^54s^2$. Da die 3d-Elektronen an der Bindung nicht beteiligt sind, ergibt sich nach der Hundschen Regel ein maximales Spinmoment von $S = 5/2$. Eine Besonderheit dieses Materialtyps ist die s,p-d Austauschwechselwirkung zwischen Elektronen des Leitungs- bzw. Valenzbandes und den lokalisierten Elektronen der magnetischen Ionen (siehe [Abschnitt 2.4](#)).

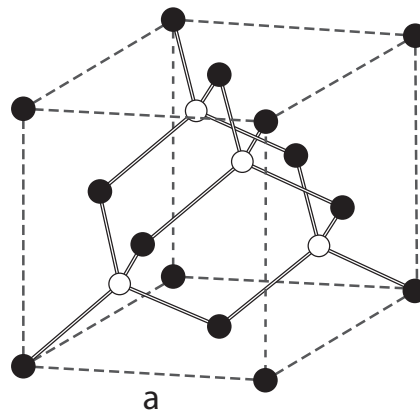


Abbildung 3.2 Schematische Darstellung der Zinkblende-Struktur

3.1.2 Mn-dotierte InAs Quantenwellstrukturen

Die Heterostrukturen wurden mittels Molekularstrahlepitaxie (MBE³) hergestellt. Verantwortlich für das Wachstum des Halbleitermaterials waren Ursula Wurstbauer und Josef Loher am Lehrstuhl Wegscheider bzw. Lehrstuhl Bougeard an der Universität Regensburg. Eine detaillierte Beschreibung des Wachstumsprozesses findet sich in [[37](#)] und [[121](#)].

¹Face-centered cubic.

²Diluted magnetic semiconductor.

³Molecular beam epitaxy.

Als Substratmaterial für das InAs-Wachstum dient GaAs. Die Gitterfehlانpassung zwischen InAs und GaAs bzw. AlAs beträgt ca. 7 %. Daher wird eine metamorphe Pufferschicht zur Verspannungsrelaxation benötigt. Dazu wird während des Wachstums der In-Gehalt sukzessive auf 75 % erhöht. Zuletzt dient die $\text{In}_{0.75}\text{Al}_{0.25}\text{As}$ -Schicht als gitterangepasstes, virtuelles Substrat für das darauffolgende Wachstum. Die [Abbildung 3.3](#) zeigt die Schichtfolge der verwendeten Strukturen (GaAs-Substrat nicht abgebildet).

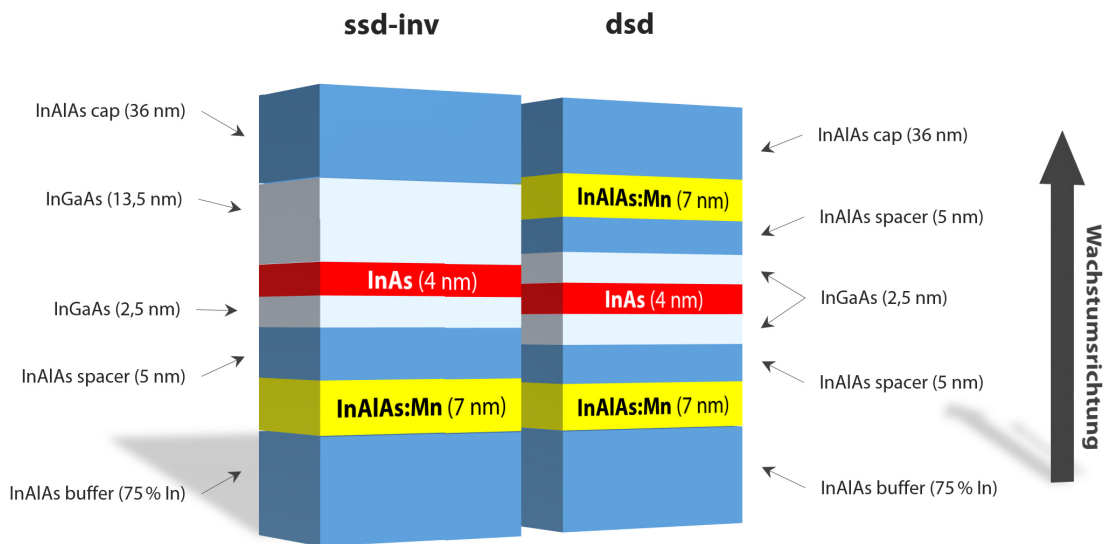


Abbildung 3.3 Aufbau der verwendeten invertiert dotierten (ssd-inv) und doppelseitig dotierten (dsd) Heterostrukturen

Neben einer doppelseitig dotierten Struktur (dsd⁴) wurde einseitig, invertiert dotiertes (ssd-inv⁵) Material verwendet. Bei einer inversen Dotierung wird die Dotierschicht vor dem leitenden Kanal gewachsen. Die Dotierung wird vom InGaAs-Quantentopf durch einen 5 nm breiten InAlAs-Spacer abgetrennt, um Einflüsse von Coulomb-Potentialen gering zu halten. Im InGaAs-QW ist ein 4 nm breiter InAs-Kanal eingebettet. In diesem Kanal bildet sich bei tiefen Temperaturen ein zweidimensionales Lochgas aus. Die Gitterfehlانpassung zwischen $\text{In}_{0.75}\text{Ga}_{0.25}\text{As}$ und InAs beträgt 1,5 %, sodass der InAs-Kanal kompressiv verspannt wächst. Durch Segregation der Mn-Atome in Wachstumsrichtung gelangen Mn-Ionen aus der unteren Dotierschicht in den leitenden InAs-Kanal [122]. Dadurch befinden sich magnetische Momente im Quantentopf. Eine Rückdiffusion von Mn aus der oberen Dotierschicht findet nicht statt [123]. Bei den vorliegenden Proben ist dieser Vorgang essentiell für die Beobachtung des anomalen Hall-Effekts. Bei dem, hier nicht aufgeführten, nicht-invertiert dotierten Material trat der anomale Hall-Effekt nicht auf [40]. Die obere InAlAs-Schicht dient zum Schutz der darunterliegenden Schichten.

⁴Double-side doped.

⁵Inverse single-side doped.

Die Dotierkonzentration in der InAlAs:Mn-Schicht hängt im Wesentlichen von der Temperatur der Mn-Zelle während des Wachstums ab. Aus der Flusskalibrierung der Mn-Zelle wurde für alle Wafer ein oberer Grenzwert für die absolute Mn-Konzentration von $< 2 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ berechnet [123]. Durch Sekundärionen-Massenspektrometrie wurde die Mn-Konzentration im InAs-Kanal auf maximal $\sim 1\%$ der Gesamtdotierkonzentration abgeschätzt [78]. Die untersuchten Heterostrukturen zeigten in Magnetisierungsmessungen mittels SQUID⁶ paramagnetisches Verhalten [40]. Die Magnetisierungskurve der leitenden Schicht kann mit SQUID-Messungen allerdings nicht bestimmt werden, da stets die Magnetisierung der gesamten Probe, einschließlich Dotierschicht, gemessen wird. Zudem liegt die Signalstärke bereits an der Empfindlichkeitsgrenze des verfügbaren Sensors, sodass die geringere Magnetisierung im Bereich des Quantentrops vermutlich nicht mehr aufgelöst werden kann [40].

Eine Übersicht aller verwendeten Heterostrukturen mit Angabe des spezifischen Widerstandes bei 1,7 K ohne angelegtes Magnetfeld und der Ladungsträgerdichte berechnet aus den SdH-Oszillationen gibt [Tabelle 3.1](#).

Tabelle 3.1 Übersicht der verwendeten Heterostrukturen mit den dazugehörigen Löcherdichten p_s , dem spezifischen Längswiderstand ρ_{xx} und der Mobilität μ bei $B = 0$ und 1,7 K.

Wafer Nr.	Struktur	MnT (°C)	p_s (10^{11} cm^{-2})	ρ_{xx} (k Ω)	μ (cm^2/Vs)	Probe
C120328B	dsd	690	15,72	0,9	4411	M0
C071004A	ssd-inv(A)	790	5,98	12	870	M1
C070921A	ssd-inv(A)	810	6,88	29	313	M2
C070910B	ssd-inv(A)	833	8,73	344	20,8	M3
C071016B	dsd	833	13,33	386	12,1	M4

3.2 Probenpräparation

Die Prozessschritte fanden größtenteils in einem Reinraum der Klasse 10000 bei konstanter Temperatur und Luftfeuchtigkeit statt. Dadurch wurde gewährleistet, dass es nicht zur Verunreinigung der Proben kommt. Die hier beschriebenen Methoden und Konzepte entstammen allgemeinen Erkenntnissen und Erfahrungswerten aus der Halbleiter-Prozesstechnik. Einen tieferen Einblick gibt beispielsweise [124]. Eine genaue Beschreibung der Prozessparameter findet sich im [Abschnitt A.4](#).

⁶Superconducting quantum interference device.

3.2.1 Strukturierung der Mesa

Das Ausgangsmaterial ist zum Schutz vor Beschädigungen mit einer Lackschicht bedeckt. Daher ist zunächst eine Folge von Reinigungsschritten (Standardreinigung) nötig:

1. Acetonbad #1
2. Acetonbad #2
3. Isopropanolbad
4. Trocknen mit Stickstoffgas

Das Lösungsmittel Aceton dient zum Lösen organischer Verunreinigungen. Dieser Schritt kann mit Ultraschall oder durch thermische Aktivierung zusätzlich unterstützt werden. Das Propanolbad ermöglicht die rückstandslose Trocknung mit Stickstoff. Diese Standardreinigung findet an vielen Stellen der Probenpräparation Anwendung (siehe dazu auch [Abschnitt A.4](#)).

Auf die gereinigte Probe wird für den nächsten Schritt eine dünne Schicht Photolack im Spincoating-Verfahren aufgebracht ([Abbildung 3.5\(a\)](#)). Mittels optischer Lithografie wird die gewünschte Probengeometrie ([Abbildung 3.4](#)) von einer Maske auf die Lackschicht übertragen ([Abbildung 3.5\(b\)](#)). Dabei wird der Lack an den belichteten Stellen chemisch so verändert, dass er sich mit einem Entwickler selektiv lösen lässt ([Abbildung 3.5\(c\)](#)). Zur Vermeidung einer unbeabsichtigten Belichtung findet der gesamte Prozess in einem Gelbraum statt. Nach dem Entwicklungsschritt entspricht die Lackstruktur der Maskenform. Im darauffolgenden Ätzschritt ist das Material unter dem Lack geschützt, sodass die gewünschte Struktur entsteht.

Die Methode der optischen Lithografie eignet sich für Linienbreiten über $0,5\ \mu\text{m}$. Kleinere Strukturen sind mit dieser einfachen Methode aufgrund der verwendeten Lichtwellenlänge und unvermeidbarer Beugungseffekte nicht möglich. Die Größe der Hall-Bar liegt allerdings in einem unproblematischen Bereich.

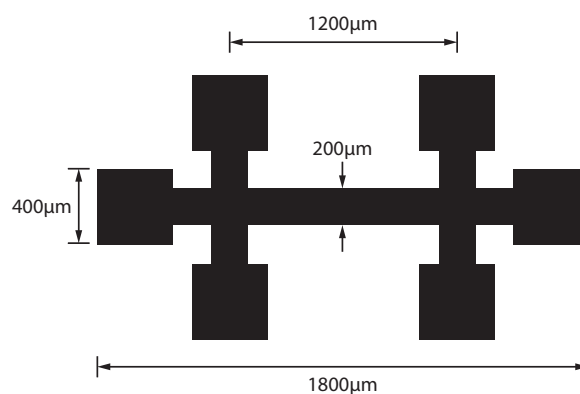


Abbildung 3.4 Verwendete Hall-Bar mit Abmessungen. Die schwarze Struktur entspricht den lichtundurchlässigen Stellen auf der Maske.

Die Abtragung des Materials erfolgt in einem nasschemischen Ätzverfahren, das im Wesentlichen in zwei Schritten abläuft: Zunächst wirkt ein Oxidationsmittel auf das Material ein. Die dadurch oxidierte Oberfläche kann mit der Säure reagieren, wodurch diese Oxidschicht abgetragen wird. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis das Material aus der Lösung entfernt und der Prozess mit Reinstwasser gestoppt wird. Bei dem verwendeten Gemisch aus Essigsäure und Wasserstoffperoxid als Oxidationsmittel (siehe [Abschnitt A.4](#)) liegen die erreichten Ätzraten bei etwa 5 nm/s. Der Photolack wird nach dem Ätzvorgang mit dem Standardreinigungsprozess entfernt ([Abbildung 3.5\(d\)](#)), gefolgt von einer Ermittlung der Stufenhöhe durch Profilometrie.

Nasschemisches Ätzen ist aufgrund zahlreicher Vorteile das Mittel der Wahl. Der Prozess ist einerseits sehr schnell und einfach in der Anwendung, andererseits ist die Ätzrate der InAs-Schicht im Vergleich zum Photolack wesentlich höher. Zudem ist die Probe weder thermischen noch mechanischen Belastungen ausgesetzt. Etwaige Nachteile, wie Unterätzungen und eine nur ungenau vorhersehbare Ätztiefe, spielen bei der Größe und Geometrie der Struktur keine Rolle. Für Anwendungen im Nanometerbereich ist die Methode allerdings nicht empfehlenswert.

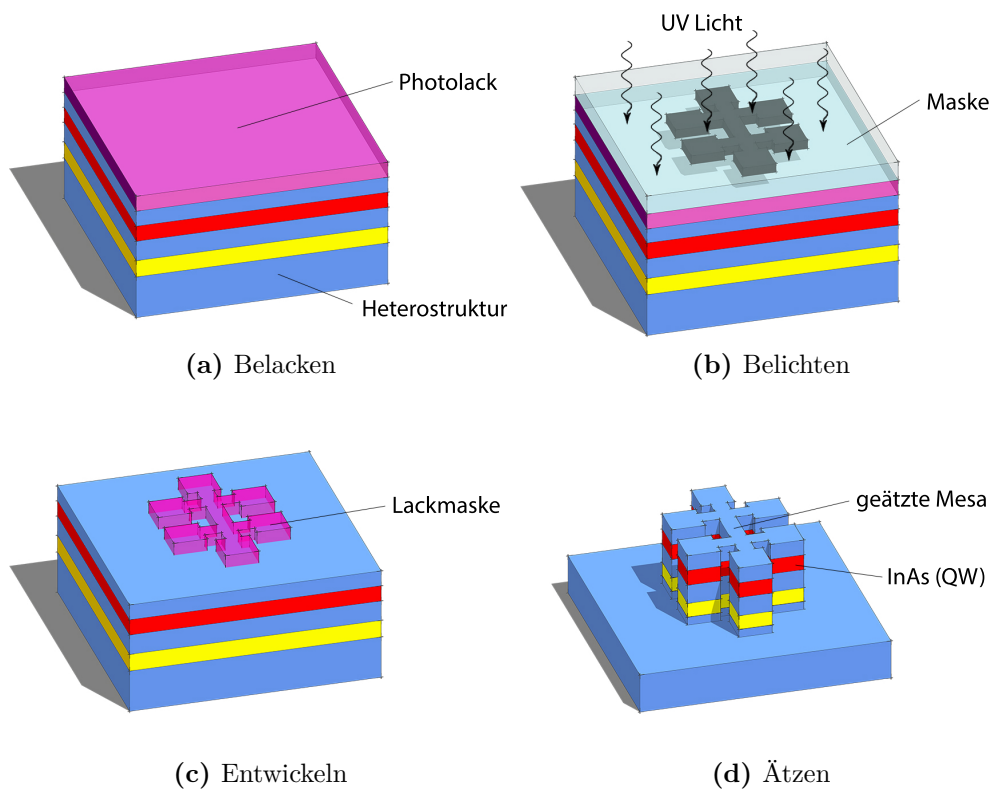


Abbildung 3.5 Schematische Illustration der Prozessschritte bei der Mesa-Produktion.

3.2.2 Ohmsche Kontakte

Für Transportmessungen an zweidimensionalen Systemen muss ein elektrischer Kontakt zum Lochgas hergestellt werden. Ein Metall auf einem Halbleiter führt zwangsläufig zum Ausbilden einer Schottky-Barriere mit einer nichtlinearen Strom-Spannungs-Charakteristik ([Abbildung 3.6](#)). Die Höhe der Schottky-Barriere kann bei III-V-Halbleitern grundsätzlich nicht durch die Wahl des Metalls beeinflusst werden [125]. Daher wird üblicherweise ein ohmscher Kontakt durch eine starke Oberflächendotierung ermöglicht. Die Breite w der Schottky-Barriere verringert sich mit steigender Dotierkonzentration N :

$$w \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (3.1)$$

Bei einer genügend dünnen Barriere dominiert der quantenmechanische Tunnelprozess, statt der thermischen Anregung [125]. Der leitende Kanal liegt allerdings 50 nm unter der Oberfläche und wird erst durch Einlegieren ankontaktiert. Hierbei ermöglicht die thermische Anregung das Hineindiffundieren der Metallatome in das Halbleitermaterial.

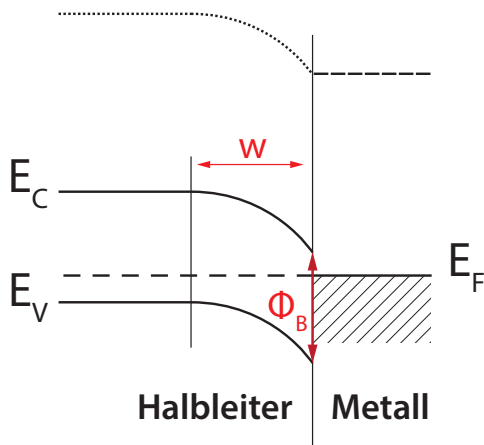


Abbildung 3.6 Schottky-Barriere der Höhe Φ_B an einem p-Typ-Halbleiter-Metall-Übergang. Die Diffusion der Elektronen vom Metall zum Halbleiter erzeugt eine Raumladungszone mit der Breite w .

In der Praxis wird Indium mit einem 4–6 %igen Zink-Anteil als Akzeptor mit Hilfe eines Lötkolbens auf die Kontakte aufgebracht. Die Kontaktflächen werden zuvor mit einer Diamantnadel angeritzt, um innere Kreisströme in den Kontaktflächen zu verhindern und eine Teilnahme aller Randkanäle an der Leitung sicherzustellen [126]. Im Anschluss wird die Probe im Legierofen unter Formiergas-Atmosphäre 60 s bei 350 °C einlegiert. Unmittelbar im Anschluss wird eine Strom-Spannungs-Kennlinie aufgenommen, womit das Vorhandensein von ohmschen Kontakten überprüft werden kann.

Als alternative Methode können die Kontakte auch im Hochvakuum thermisch aufgedampft werden. Durch Zuhilfenahme eines zweiten Dotieratoms (z. B. Au-Zn für p-dotiertes Material) kann die Dotierkonzentration erhöht oder die Legiertemperatur

zur Schonung des Materials vermindert werden [125]. Dieses alternative Vorgehen kam allerdings nicht zum Einsatz, da sich bereits das Aufbringen der Kontakte mit einem LötKolben als zweckmäßig, effizient und einfach in der Durchführung erwies. Aufgrund der Mesagröße und -form ist das Aufbringen exakt platzierter Kontakte nicht nötig und auch die Temperaturbelastung der Proben stellte in der Praxis kein Problem dar. Zudem führt die Alternativmethode zu einer signifikant höheren Ausfallquote der Kontakte [127].

3.2.3 Topgate

Die Anzahl der Ladungsträger im leitenden Kanal kann, wie bei einem Feldeffekttransistor, mit einer Gateelektrode beeinflusst werden. Dazu wird ein metallischer Kontakt auf die Probenoberfläche aufgebracht. Da die Schottky-Barriere zwischen Gate und dem InAs-QW zu klein ist, muss zunächst ein Dielektrikum aufgetragen werden. Bei den vorliegenden Proben kamen zwei verschiedene Dielektrika zum Einsatz: Das high-k Dielektrikum Aluminiumoxid (Al_2O_3) und in einer früheren Probengeneration Parylene C. Die Alternative wurde aufgrund von anfänglichen Prozessproblemen bei der Herstellung der Al_2O_3 -Schicht notwendig [128]. Der Vollständigkeit halber werden beide Verfahren kurz beschrieben.

Parylenefilm

Parylene C ist ein polymeres Beschichtungsmaterial mit hoher elektrischer Durchschlagsfestigkeit. Es wird im Vakuum durch Kondensation aus der Gasphase auf die Probe aufgetragen. Die aufgetragene Schichtdicke betrug etwa 350 nm. Die Proben waren bei den Messungen bis 20 V durchbruchsfrei, wodurch höhere Durchbruchspannungen nicht ausgeschlossen sind.

Aluminiumoxid

Das Aluminiumoxid (Al_2O_3) wird mittels Atomlagenabscheidung (ALD⁷) auf die Mesa aufgebracht. Die ALD ermöglicht durch die Ausgangsstoffe Trimethylaluminium ($\text{C}_3\text{H}_9\text{Al}$) und Wasser (H_2O) einen selbstbegrenzenden Ablagerungsprozess zur Abscheidung dünner Schichten. Die Vorzüge dieses Verfahrens sind sehr glatte und gleichmäßige Oberflächen bei sehr guter Beherrschung der Schichtdicke. Hierbei stellt Al_2O_3 ein Dielektrikum mit hoher Permittivität ($\epsilon_r = 9$)⁸ und Durchschlagsfestigkeit ($E_{\text{BD}} \sim 7,6 - 8,3 \text{ MV/cm}$) dar [129]. In der Praxis hat sich allerdings gezeigt, dass keine lückenlose Isolatorschicht abgeschieden werden konnte. Daher wurde vor dem Al_2O_3 , mittels plasmaunterstützter chemischer Gasphasenabscheidung (PECVD⁹), eine dünne Keimschicht aus SiO_2 aufgebracht. Nachteilig ist, wie

⁷Atomic layer deposition.

⁸Im englischen Sprachraum ist die Bezeichnung κ für die Permittivität üblich. Daraus leitet sich auch der Begriff „high-k-Dielektrikum“ ab.

⁹Plasma-enhanced chemical vapour deposition.

Transportmessungen an Proben dieser Bauart gezeigt haben, dass eine Hysterese des Längswiderstandes in Abhängigkeit von der Topgatespannung ([Abbildung 3.7](#)) auftritt. Als Konsequenz der Hysterese ist die Angabe der Gatespannung nicht aussagekräftig. Daher wird in den Messungen immer explizit die berechnete Ladungsträgerdichte angegeben. Zu dem Hystereseeffekt führen umladbare Zustände im Volumen des Dielektrikums ([Abbildung 3.8](#)). Diese Zustände rühren von eingefangenen Volumen- bzw. Oxidladungen, ortsfesten positiven Ladungen in Form von ionisierten Si-Atomen und umladbaren Grenzflächenzuständen [130]. Von Vorteil ist die geringe Schichtdicke und die hohe Permittivität, wodurch es möglich ist, die Ladungsträgerdichte in der Probe mit verhältnismäßig geringer Gatespannung zu sättigen oder vollkommen zu verarmen ([Abbildung 3.7](#)). Genauere Informationen zu high-k-Dielektrika und zur Atomlagenabscheidung finden sich in [129, 130]. Einen guten Überblick über die Entwicklung des Isolatorrezepts gibt [131].

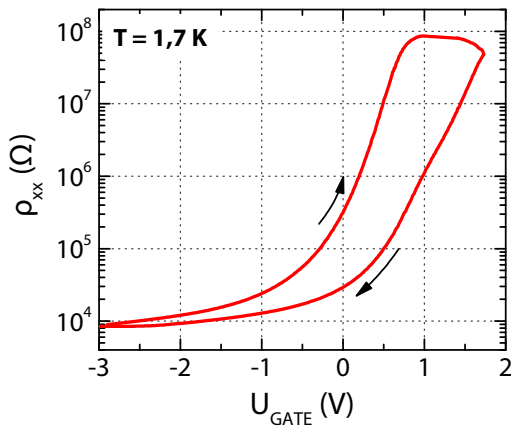


Abbildung 3.7 Widerstandshysterese (ohne anliegendes Magnetfeld) aufgrund von Ladungen im Oxid. Beispielprobe mit $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ als Dielektrikum. Der Längswiderstand ρ_{xx} ist durch $\rho_{xx} \sim 1/p_s$ mit der Ladungsträgerdichte p_s verknüpft [34].

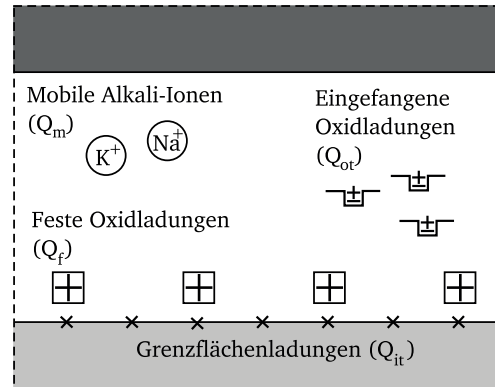


Abbildung 3.8 Im Dielektrikum auftretende Ladungen (aus [130]).

Die Topgate-Herstellung wird durch Aufbringen einer Gateelektrode abgeschlossen. Dazu wird in einem weiteren optischen Lithografieschritt, analog zu [Abschnitt 3.2.1](#), eine kreuzförmige Lackmaske über der Hall-Bar aufgebracht. Anschließend wird mit der Aufdampfanlage Univex 450 von Leibold unter Hochvakuum 120 nm Gold thermisch aufgedampft. Zur besseren Haftung, durch eine höhere Oberflächenrauigkeit, wird die Oberfläche mit Argonplasma vorbehandelt. Durch den darauffolgenden Lift-off-Prozess mit Aceton wird der Lack entfernt. Die kreuzförmige Geometrie des Gates ermöglicht ein Ankontaktieren außerhalb der Hall-Bar und damit die Schonung der darunterliegenden Isolatorschicht. [Abbildung 3.9](#) gibt eine Übersicht über die Topgate-Produktion.

3.2.4 Fertigstellung

Nach dem letzten Strukturierungsschritt wird die Probe in einen 20-poligen Chipcarrier eingeklebt und die Kontakte der Hall-Bar werden durch dünne Golddrähte mit den Kontakten des Chipcarriers verbunden.

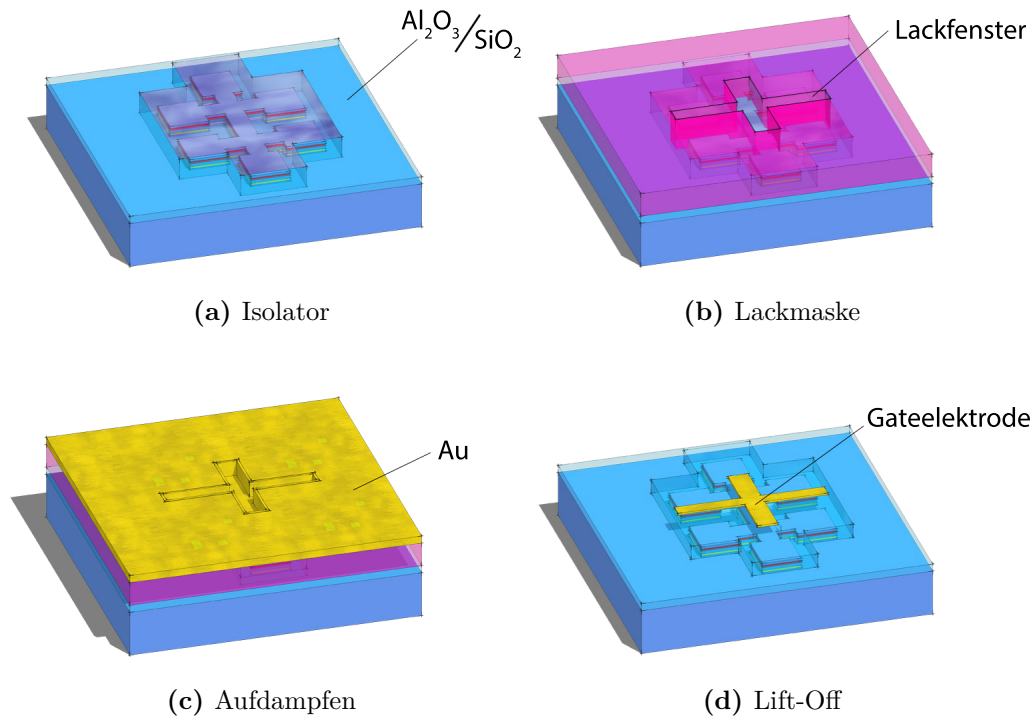


Abbildung 3.9 Herstellung der Topgate-Elektrode.

3.3 Messtechnik

3.3.1 Kryostate

Eine der grundlegenden Einflussgrößen in der Physik ist die Temperatur. Eine exakte Kontrolle dieser Größe, bis hin zu tiefsten Temperaturen, ist für viele Experimente unerlässlich. Auf unser Materialsystem bezogen findet beispielsweise bei Raumtemperatur der Ladungsträgertransport außerhalb des Potentialtopfes statt, wodurch Quanteneffekte nicht beobachtet werden können. Hinzu kommt, dass die mittlere freie Weglänge der Ladungsträger durch Phononenstreuung stark verkürzt ist. Durch Verwendung von zwei Kryostatensystemen konnten die Proben auf einer Temperaturskala von 15 mK bis 120 K vermessen werden. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über Funktionsweise und Aufbau dieser zwei Kryostatensysteme gegeben. Für eine tiefer gehende Beschäftigung mit dieser Thematik empfehlen

sich die Bücher „Low-Temperature Physics“ von Enns und Hunklinger [132] und „Practical Cryogenics“ von Balshaw [133].

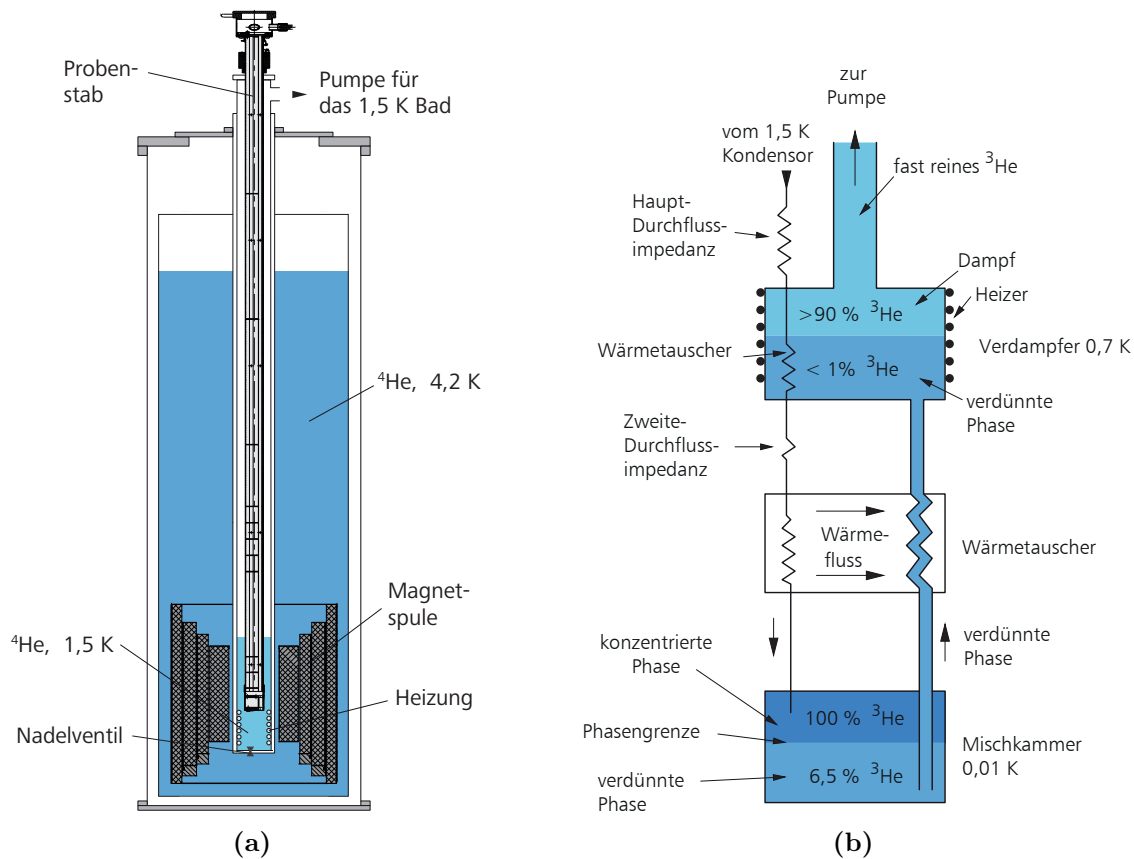


Abbildung 3.10 (a) Aufbau eines ^4He -Kryostaten und (b) Darstellung des $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Kreislaufs eines Verdünnungskryostaten (aus [132]).

^4He -Verdampferkryostat

Für den Temperaturbereich über einem Kelvin wurde ein He-Kryostat der Firma Oxford verwendet, der nach dem Prinzip der Verdampfungskühlung funktioniert. Im eigentlichen ^4He -Badkryostaten befindet sich ein Einsatz zur Temperaturkontrolle, ein sogenanntes „Variable Temperature Inset“ (VTI). Es ist über ein Nadelventil mit dem ^4He -Reservoir verbunden und kann geflutet werden. Die Probe wird über einen Messstab in das VTI eingeführt und befindet sich somit in flüssigem Helium. Unter Normaldruck ergibt sich für flüssiges ^4He eine Siedetemperatur von 4,2 K. Der ^4He -Dampf und die flüssige Phase sind im thermodynamischen Gleichgewicht und der Dampfdruck über der Flüssigkeit entspricht dem Normaldruck. Durch Abpumpen des ^4He -Dampfes verringert man den Druck über der Flüssigkeit und es stellt sich ein neues thermodynamisches Gleichgewicht bei einer tieferen Temperatur ein. Mit sinkender Temperatur verringert sich auch die Abdampfrate, womit die Kühlleistung zurückgeht. Bei etwa 1,5 K liegen Wärmeeintrag von außen und Kühlleistung

auf gleicher Höhe, wodurch die erreichbare Tiefsttemperatur limitiert ist. In [Abbildung 3.11](#) ist der Zusammenhang zwischen Dampfdruck und Temperatur für verschiedene Kühlflüssigkeiten dargestellt. Wie aus den Dampfdruckkurven ersichtlich ist, lassen sich mit dem ^3He -Isotop noch tiefere Temperaturen realisieren. Allerdings ist ^3He sehr selten und dadurch teuer. Daher muss ein ^3He -Verdampferkryostat als geschlossener Kreislauf aufgebaut werden, wodurch Verluste vermieden werden. Für Temperaturen über 4,2 K steht im System eine Heizung bereit. Dazu wird allerdings das VTI nicht geflutet, sondern ein konstanter ^4He -Fluss eingestellt und mit dem Heizer sofort verdampft. Durch einen angeschlossenen PID-Regelkreis, kann die Heizleistung gesteuert und damit jede Temperatur im Bereich von 1,5–300 K exakt eingestellt werden. In das Kryostatensystem ist eine supraleitende Magnetspule integriert, die Magnetfelder bis 14 T erzeugt. Einen Überblick über den Aufbau eines Verdampferkryostaten gibt [Abbildung 3.10 \(a\)](#).

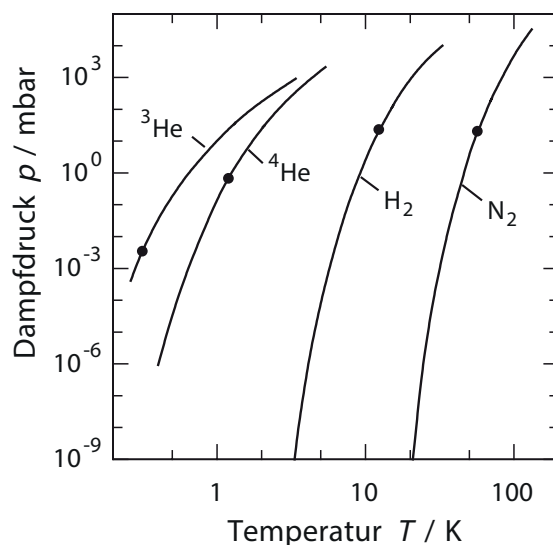


Abbildung 3.11 Dampfdruck der in der Kryotechnik gängigen Flüssigkeiten als Funktion der Temperatur (aus [132]). Die typischerweise erreichbaren tiefsten Temperaturen sind mit einem Punkt (•) gekennzeichnet.

Mischungskryostat (Verdünnungskryostat)

Noch tiefere Temperaturbereiche können durch das Ausnutzen weiterer physikalischer Eigenschaften von Helium erschlossen werden. Ein $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungskryostat beruht auf der Beobachtung, dass sich eine $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischung bei Temperaturen unterhalb von 1 K in zwei Phasen aufteilt. Die konzentrierte Phase ist reines ^3He , während die verdünnte Phase hauptsächlich aus ^4He besteht. Der geringe ^3He -Anteil ist temperatur- und druckabhängig, kann allerdings selbst bei 0 K nicht weniger als etwa 6,5 % betragen. Da sich die ^3He -Atome aufgrund der suprafluiden Eigenschaften von ^4He reibungsfrei in der verdünnten Phase bewegen können, spricht man auch von der „Quasi-Gasphase“. Wird nun mittels einer Pumpe der verdünnten Phase kontinuierlich ^3He entzogen und der konzentrierten Phase zugeführt, durchlaufen die ^3He -Atome einen Phasenübergang von der konzentrierten in die verdünnte Phase. Dies geschieht sobald der kritische Mindestanteil von ^3He in der verdünnten Phase

unterschritten wird. Der Phasenübergang entspricht einer Verdunstung. Die dazu nötige Energie wird der Umgebung thermisch entzogen, was zu einer Abkühlung führt. Prinzipiell sind mit dieser Methodik beliebig tiefe Temperaturen möglich, in der Praxis wird die erreichbare Tiefsttemperatur allerdings durch den äußeren Wärmeeintrag auf etwa 15 mK begrenzt. Die Möglichkeit, der verdünnten Phase vornehmlich ^3He zu entziehen, ergibt sich durch den wesentlich höheren Dampfdruck von ^3He im Vergleich zu ^4He bei gleicher Temperatur. Ein schematischer Mischungskreislauf ist in [Abbildung 3.10 \(b\)](#) dargestellt. Bei den vorliegenden Messungen wurde ein Kryostat der Firma Oxford vom Typ Kelvinox TLM verwendet. Der in das System integrierte supraleitende Magnet erzeugt Magnetfelder bis zu 19 T.

3.3.2 Messelektronik

Die Transportuntersuchungen an den meisten Proben wurden in einer Zweipunktgeometrie mit Gleichstrom (DC¹⁰) durchgeführt. Lediglich die niederohmige Probe „M0“ (siehe [Tabelle 3.1](#)) wurde zusätzlich in einer Vierpunktgeometrie mit Wechselstrom (AC¹¹) gemessen:

Vierpunktmessung

Für eine präzise Widerstandsmessung ist eine Vierpunktmessung erforderlich. Hierbei gibt es neben den beiden stromführenden Kontakten ([Abbildung 3.12 \(a\)](#)) noch zwei weitere Kontakte entlang des Strompfades, mit denen die Spannung hochohmig über die Probe abgegriffen wird. Durch den sehr großen Innenwiderstand des Messgerätes (10 M Ω) ist die Stromverzweigung zu vernachlässigen und es kommt zu keinen Messabweichungen durch Leitungs- und Kontaktwiderstände. Der zu messende Widerstand wird nach dem ohmschen Gesetz $R = U_{xx}/I$ berechnet [[134](#)]. Der Probe wird durch einen ausreichend dimensionierten Vorwiderstand R_{Vor} (mit $R_{Probe} \ll R_{Vor}$) ein konstanter Strom aufgeprägt. Neben der Längsspannung wurde zusätzlich, mit zwei gegenüberliegenden, senkrecht zur Stromrichtung positionierten Kontakten, die Hall-Spannung U_{xy} gemessen. Bei der Vierpunktgeometrie wurde zur Spannungs- und Strommessung Lock-In-Technik (Signal Recovery 7265) verwendet. Einer der Lock-In-Verstärker dient einerseits zur Strommessung und gibt andererseits durch einen integrierten Frequenzgenerator eine Wechselspannung mit konstanter Amplitude als Referenz vor. Diese Referenz nutzen alle Lock-In-Verstärker zur frequenzselektiven Messung, wodurch zwischen dem eigentlichen Messsignal und eingekoppelten Störsignalen unterschieden werden kann. Eine ausführliche Beschreibung der Funktionsweise eines Lock-In-Verstärkers bieten [[135](#)] und [[136](#)].

¹⁰Direct current.

¹¹Alternating current.

Zweipunktmessung

Bei Proben mit Widerständen im $\text{G}\Omega$ -Bereich werden die Kontakt- und Leitungswiderstände vernachlässigbar, wodurch auf einen Vierpunktaufbau verzichtet werden kann. Vor allem wird aber der Rückgriff auf Gleichstrommessgeräte notwendig, die einen bauartbedingten höheren Innenwiderstand ($>100\text{ M}\Omega$) aufweisen. Die größere Rauschamplitude durch den Verzicht auf Lock-In-Technik muss bei hochohmigen Proben in Kauf genommen werden. Beim Zweipunkt-Messaufbau wird eine bekannte Biasspannung U_{Bias} mit einem Yokogawa 7651 an den beiden Probenkontakten angelegt (Abbildung 3.12 (b)). Der daraus resultierende Stromfluss I wird durch einen DL Instruments Ithaco 1211 verstärkt und als Spannungssignal an ein Multimeter (Agilent 34410A) weitergegeben. Bauartbedingt liegt am Ausgang des Stromverstärkers auch bei $U_{Bias} = 0$ eine Offsetspannung an, wodurch ein vermeintlicher Strom detektiert wird. Dieser Offset lässt sich durch einen Regler verringern, allerdings ohne ihn gänzlich zu kompensieren. Der verbleibende Offset ist allerdings in den meisten Fällen zu vernachlässigen. Das Hall-Signal U_{xy} wurde mit einem Nanovoltmeter (Agilent 34420A) gemessen.

Zur Beeinflussung der Ladungsträgerdichte wurde bei beiden Setups ein Yokogawa 7651 an die Gateelektrode angeschlossen. Die Messungen am Mischungskryostaten erforderten zusätzlich die Verwendung von π -Filtern, um das Einkoppeln hochfrequenter, externer Strahlung in den Messaufbau zu verhindern. Dies ist unter anderem aufgrund der tiefen Temperaturen nötig. Durch den Filter wird hochfrequentes Rauschen verringert, es kommt zu keinem zusätzlichen Wärmeeintrag und es wird möglich Bad- und Elektronentemperatur im Gleichgewicht zu halten [137]. Beim Messaufbau wurde darauf geachtet, der gesamten Schaltung lediglich einen Erdbezugspunkt zu geben, sodass keine Masseschleifen entstehen konnten. Die Steuerung der supraleitenden Magnete und der angeschlossenen Geräte sowie das Aufnehmen der Messdaten erfolgte mit dem Messprogramm Lab::Measurement [138].

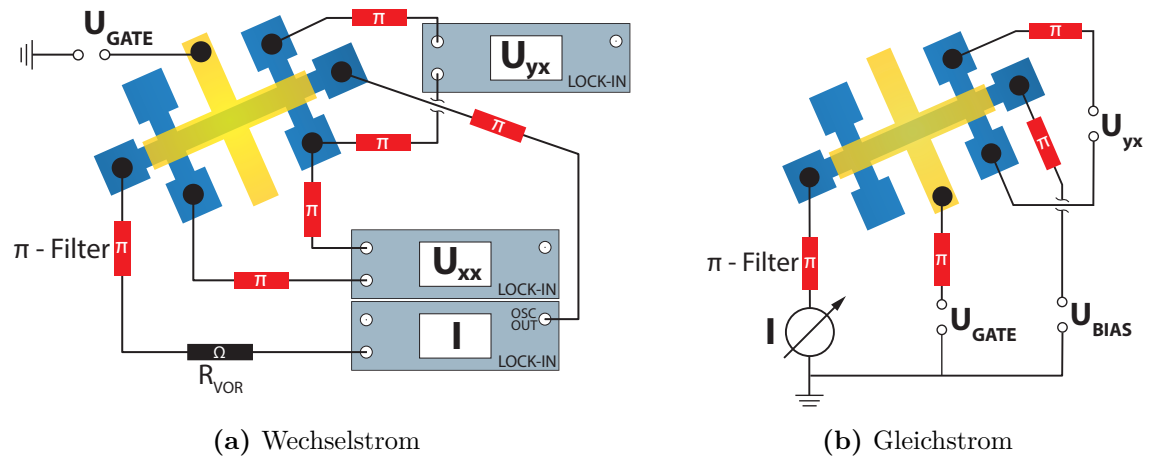


Abbildung 3.12 Messanordnung mit zusätzlich anlegbarer Gatespannung und optionalen π -Filtern im (a) Vier-Punkt- und (b) Zwei-Punkt-Setup

4 Der Metall-Isolator-Übergang in InAs:Mn

Verdünn-magnetische Halbleiter zeigen an der Grenze zwischen lokalisiertem und delokalisiertem Transport erstaunliche physikalische Effekte. Der Widerstand ist häufig durch eine enorm starke Magnetfeldabhängigkeit geprägt, woraus sich als Konsequenz ein magnetfeld-induzierter Metall-Isolator-Übergang ausbildet. Eine tragende Rolle spielen dabei die s,p-d-Austauschwechselwirkung und die daraus resultierenden Mechanismen. Durch die Untersuchung von magnetisch-dotierten zweidimensionalen Ladungsträgersystemen können vorhandene Theorien und Konzepte im Kontext niedrigdimensionalen Transports überprüft werden. Systematische Messungen bilden dabei die experimentelle Grundlage für eine Ergänzung oder Anpassung vorhandener theoretischer Ansätze. Das vorliegende Material ist durch den starken Lokalisierungseffekt um $B = 0$ und die ausgeprägte Magnetfeldabhängigkeit besonders geeignet.

Im diesem Kapitel wird der Metall-Isolator-Übergang (MIT) in fünf unterschiedlich hoch Mn-dotierten QW-Heterostrukturen im Detail untersucht, wobei zusätzlich die Ladungsträgerdichte durch eine Gateelektrode variiert wurde. Durch systematische Messungen und die Analyse der temperatur- und magnetfeldabhängigen Widerstandskennlinien können die Proben konkreten Transportmodellen zugeordnet werden. Zunächst erfolgt die Einordnung der individuellen Abkühlkurven im Rahmen der Hopping-Transport-Theorie, gefolgt von der Untersuchung des auffallend starken negativen Magnetowiderstandes bei tiefen Temperaturen. Im letzten Teil wird der magnetfeld-induzierte MIT beleuchtet. Der Begriff „Metall-Isolator-Übergang“ bedeutet im Rahmen dieser Arbeit stets einen Phasenübergang von *isolierendem* zu *metallischem* Verhalten. Soweit im Text nicht abweichend definiert, wird das externe Magnetfeld stets als senkrecht zum Quantentrog angenommen. Weiterhin wurden alle magnetfeldabhängigen Messungen wie in [Abschnitt A.1](#) beschrieben symmetrisiert.

4.1 Temperaturabhängige Messungen ohne externes Magnetfeld

Zum tieferen Verständnis des Ladungstransports im vorliegenden Mn-dotierten 2DHG ist die Untersuchung des zugrundeliegenden Transportregimes notwendig. In unge-

ordneten Systemen mit vielen Störstellen wird die Ladungsträgerbewegung bei tiefen Temperaturen durch Lokalisierung und Hopping-Transport dominiert. Zur Bestimmung des maßgebenden Hopping-Mechanismus wurde der spezifische Widerstand als Funktion der Temperatur in einem Bereich von 1,7 K bis 120 K gemessen und mit Hilfe verschiedener Hopping-Modelle analysiert.

4.1.1 Experimentelle Ergebnisse

Der temperaturabhängige, kontinuierliche Widerstandsverlauf aller Proben wurde durch langsames Abkühlen im Kryostaten von 60 K auf Basistemperatur (etwa 1,7 K) erfasst. Die Temperatur der Probe wurde dabei mit einem Sensor in der Nähe des Probenhalters gemessen. Durch eine geringe räumliche Distanz zwischen Probenhalter und Temperaturodiode kann es jedoch zu einer Abweichung von der „echten“ Probentemperatur kommen. Daher wurde in einem zweiten Durchgang bei ausgewählten Werten die Temperatur im VTI durch einen Regelkreis stabilisiert und der Widerstand erneut gemessen. Dabei ist davon auszugehen, dass sich bei einer stabilen Temperatur zwischen Probenhalter und Temperatursensor nach einigen Minuten ein thermisches Gleichgewicht einstellt.

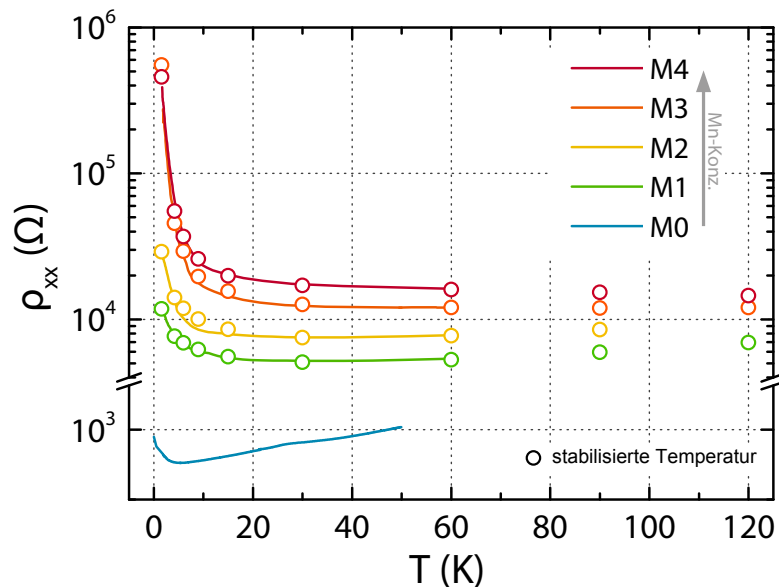


Abbildung 4.1 Temperaturabhängiger Widerstand der Proben M0–M4, wobei die Mn-Konzentration im QW mit steigender Probennummer zunimmt. Die Probe M0 zeigt bei höheren Temperaturen metallisches Verhalten, während der Temperaturverlauf der Proben M1–M4 typisch für isolierendes Material ist. Durchgezogene Kurven sind kontinuierlich erfasste Daten einer abkühlenden Probe, Kreise stellen temperaturstabilisierte Werte dar. Weitere Erklärungen dazu finden sich im Fließtext. Zur besseren Darstellbarkeit wurde die Y-Achse unterbrochen.

In [Abbildung 4.1](#) ist der spezifische Widerstand ρ_{xx} als Funktion der Temperatur ohne anliegendes Magnetfeld für die Proben M0–M4 dargestellt. Durchgezogene

Kurven repräsentieren dabei die kontinuierlichen Abkühlkurven und leere Kreise die stabilisierten Messwerte der Proben M1–M4 bei den Temperaturen 1,7 K, 4,2 K, 6 K, 9 K, 15 K, 30 K, 60 K, 90 K und 120 K. Die stabilisierten Messwerte zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Abkühlkurven. Daher ist nur von einer geringen Abweichung zwischen Proben- und Sensortemperatur auszugehen. Nennenswerte Unterschiede finden sich lediglich bei den Proben M2 und M3 im Temperaturbereich 5–20 K.

Die Analyse des Widerstandsverlaufs der Proben M1–M4 zeigt mit sinkender Temperatur einen exponentiellen Anstieg, der mit steigender Mn-Konzentration der Proben ausgeprägter wird. Dieses Verhalten deutet auf Hopping-Leitung hin. Die Probe M0 weist bis etwa 5 K metallisches Verhalten auf, d. h. der Widerstand sinkt mit sinkender Temperatur. Für tiefere Temperaturen steigt der Widerstand allerdings etwas an. Auf das temperaturabhängige Verhalten der Probe M0 wird im [Abschnitt 4.3](#) im Rahmen des magnetfeld-induzierten MIT näher eingegangen. In der Folge werden zunächst die Proben M1–M4 im Rahmen der Hopping-Transporttheorie näher untersucht.

Als generelle Voraussetzungen für die Hopping-Leitung definierten Mott und Twose [[139](#), [140](#)] das Verhältnis $r/a_B^* = \lambda$, mit dem effektiven Bohr-Radius der Akzeptoren

$$a_B^* = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\hbar^2}{m^*e^2} \quad (4.1)$$

und dem mittleren Abstand zwischen zwei Störstellen

$$r = \left(\frac{3}{4\pi N_0} \right)^{1/3}. \quad (4.2)$$

Hierbei ist ϵ_0 die Permittivität des Vakuums, ϵ_r die relative Permittivität des Wirtskristalls und N_0 die Störstellendichte. Wenn der Transport über Hopping stattfindet muss $\lambda \gg 1$ gelten. Für $\lambda \rightarrow 1$ geht das System in metallisches Verhalten über. Mit den systemspezifischen Parametern für InAs:Mn ($m^* = 0,5 m_0$, $\epsilon_r = 15,15$ (InAs) [[141](#)] und $N_0 < 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ (im QW) [[123](#)]) erhält man $a_B^* = 1,60 \text{ nm}$ und $r > 6,2 \text{ nm}$. Damit ergibt sich

$$\lambda > 3,9, \quad (4.3)$$

wodurch die Annahme von Hopping-Transport gerechtfertigt ist. Im Fall von Nearest-Neighbour-Hopping (NNH) hüpfen Ladungsträger mit einer Aktivierungsenergie W zur nächstgelegenen Störstelle. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes wird in diesem Fall definiert als

$$\rho_{xx}(T) = \rho_0 \exp\left(\frac{W}{k_B T}\right). \quad (4.4)$$

Die Aktivierungsenergie ist dabei geringer als es zur thermisch aktivierten Bandleitfähigkeit notwendig wäre. Für sehr tiefe Temperaturen kann allerdings das Springen

zu einer benachbarten Störstelle aufgrund sehr unterschiedlicher Energieniveaus ungünstig sein. In solchen Fällen ist der Wechsel zu einer entfernten, aber energetisch ähnlichen Störstelle wahrscheinlicher. Das bedeutet einen Übergang des Ladungsträgertransports zum Variable-Range-Hopping (VRH) [142]. Die auf diese Weise optimierte Ladungsträgerbewegung führt zu einer verringerten Temperaturabhängigkeit des Widerstandes. Ausgehend von der allgemeinen Form zur Beschreibung des Hopping-Transports nach Gleichung 2.69

$$\rho(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^x \right],$$

geht der Exponent von $x = 1$ (NNH) zu $x = 1/3$ (Mott-VRH in 2D) oder $x = 1/2$ (ES-VRH) über.

Durch den Exponenten ist das vorherrschende Hopping-Regime prinzipiell exakt bestimmt. Dennoch lassen sich die Daten in vielen Fällen durch verschiedene Modelle zufriedenstellend anfitten, wodurch keine eindeutige Zuordnung zu einem spezifischen Hopping-Mechanismus möglich ist. Zur exakten Bestimmung des Exponenten x ist es daher zweckmäßig, dem Ansatz von Zabrodskii und Zinoveva [143] folgend, statt $\rho_{xx}(T)$ den Parameter $W(T)$ zu betrachten, der definiert wird als

$$W(T) = - \frac{d \ln \rho_{xx}(T)}{d \ln T}. \quad (4.5)$$

Aus Gleichung 2.69 folgt, dass $\ln(W) \approx x \ln T_0 - x \ln T$. Durch die Auftragung von $\ln W$ gegen $\ln T$ erhält man damit aus der Steigung der Regressionsgeraden den korrekten Wert für x . Mittels dieser Methodik wurde der Exponent für die Proben M1–M4 extrahiert. Die Abbildungen 4.2–4.5 zeigen den Widerstandsverlauf der vier Proben in den entsprechenden Arrhenius-Darstellungen ($\ln \rho_{xx}$ vs. $1/T^x$).

Die Probe M1 zeigt im Temperaturbereich 1,7–20 K eine lineare Abhängigkeit des logarithmierten Widerstandes von $1/T^x$ mit $x = 0,55 \pm 0,08$ (Abbildung 4.2(a)). Der Ladungsträgertransport findet demnach im Regime des VRH statt. Da der Exponent $x = 1/2$ im Falle von Mott-VRH lediglich für eine eindimensionale Probe korrekt wäre (Gleichung 2.70), wird ES-VRH angenommen. In diesem Fall weist die ansonsten konstante Zustandsdichte aufgrund der langreichweitigen Coulomb-Wechselwirkung der lokalisierten Ladungsträgerzustände eine parabolische Lücke („Coulomb gap“) im Bereich der Fermi-Energie auf. Die Temperaturabhängigkeit wird demnach nach Gleichung 2.71 beschrieben:

$$\rho_{ES,VRH}(T) = \rho_0 \exp \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \right].$$

Für den Temperaturbereich über 30 K geht das Widerstandsverhalten in die Form

$$\rho_{xx} \propto T^2 \quad (4.6)$$

über (Abbildung 4.2(b)). Dieser Zusammenhang tritt im Rahmen der von Landau 1956 entwickelten „Fermi liquid theory“ wechselwirkender Fermionen auf [144]. Das Modell beschreibt das Verhalten der meisten Metalle bei genügend tiefen Temperaturen. Die Beobachtung der T^2 -Abhängigkeit deutet auf Elektron-Elektron-Wechselwirkung hin [145] und lässt die Vermutung zu, dass der Ladungstransport in Probe M1 bei Temperaturen über 30 K von delokalisierten Ladungsträgern dominiert wird und somit als metallisch zu betrachten ist.

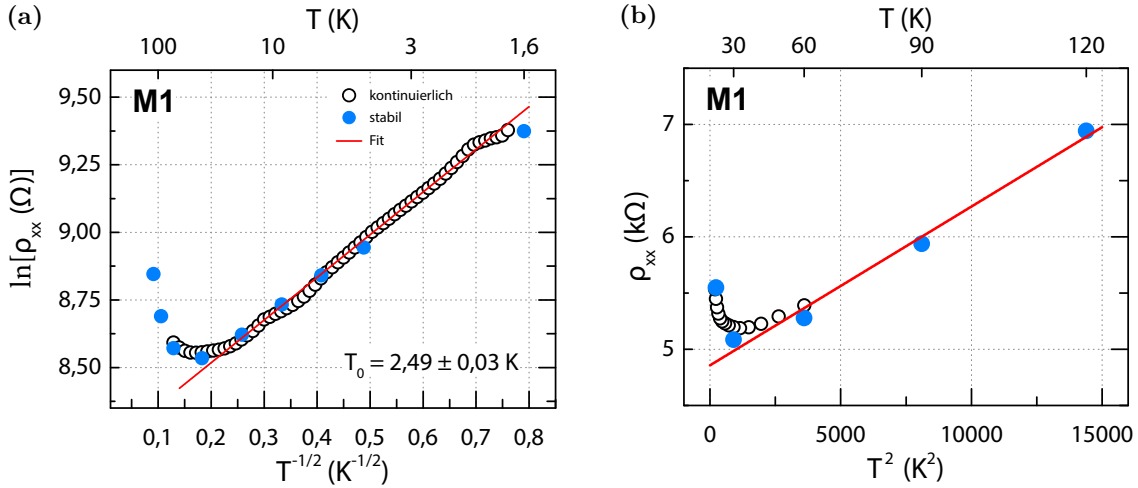


Abbildung 4.2 Widerstand als Funktion der Temperatur der Probe M1: (a) Im Bild des ES-VRH ($\ln \rho_{xx}$ vs. $1/T^{1/2}$). Gute Übereinstimmung des Fits (rote Linie) für $T < 20 K$. Die Auswertung der Steigung ergibt $T_0 = 2,49 \pm 0,03 K$. (b) Im Formalismus der „Fermi liquid theory“ (ρ_{xx} vs. T^2). Für den Temperaturbereich 30–120 K stimmt der Fit (rote Linie) ebenfalls sehr gut mit den Messdaten überein und deutet für höhere Temperaturen auf metallisches Verhalten unter Dominanz der Elektron-Elektron-Wechselwirkung hin.

Für die Probe M2, mit einer höheren Ladungsträgerdichte und höherer Mn-Konzentration, bei geringerer Mobilität, ergibt sich ein ähnliches Bild wie für Probe M1. Wie in Abbildung 4.3(a) zu sehen, zeigen die statisch gewonnenen Messdaten (blaue Kreise) ein klares Verhalten nach dem ES-VRH-Formalismus (rote gepunktete Regressionsgerade) für $T < 30 K$. Für die kontinuierlich erfassten Messdaten stellt sich dieser Zusammenhang nicht in gleicher Qualität ein. Überdies weichen die Werte der zwei Datengruppen (blaue und schwarze Kreise) gerade im betrachteten Bereich unter 30 K merklich voneinander ab, während für höhere Temperaturen eine gute Übereinstimmung gegeben ist. Mit Hilfe der oben erläuterten Methodik erhält man für die kontinuierliche Abkühlkurve $x = 0,4 \pm 0,11$. Innerhalb der Fehlergrenzen wäre hier auch die Annahme von Mott-VRH möglich. Da die stabilisierten Daten auf ES-VRH hindeuten und zugleich auch die übrigen Proben dieses Verhalten zeigen, ist die Annahme von Mott-VRH aus Konsistenzgründen weniger plausibel. Für höhere

Temperaturen ab etwa 30 K geht der Widerstand analog zu Probe M1 in eine T^2 -Abhängigkeit über (Abbildung 4.3(b)).

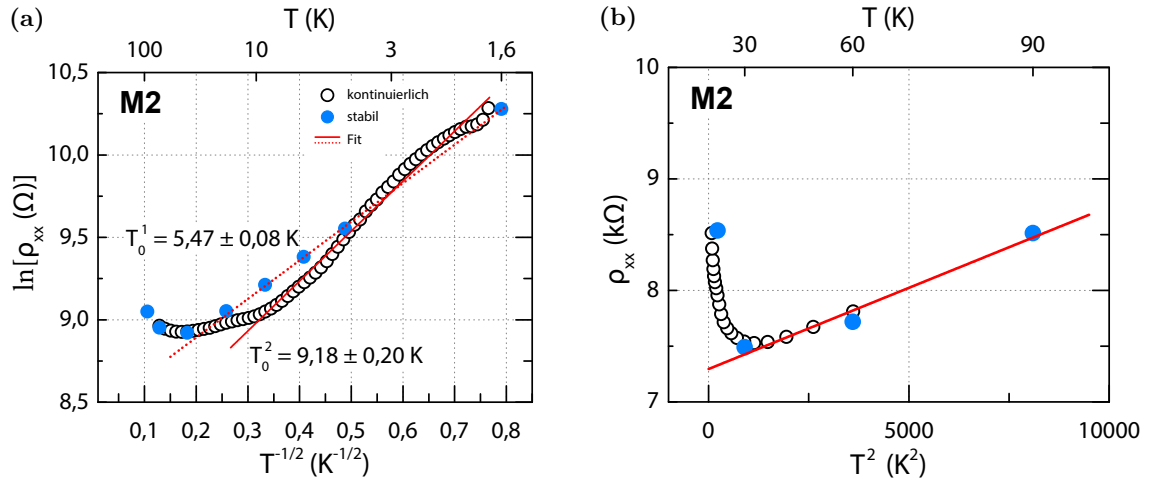


Abbildung 4.3 Widerstand als Funktion der Temperatur der Probe M2: (a) Im Formalismus des ES-VRH. Durch die Abweichung der zwei Datensätze ergeben sich aus dem Fit unterschiedliche Werte für T_0 : $T_0^1 = 5,47 \pm 0,08 K$ (rote gepunktete Linie) und $T_0^2 = 9,18 \pm 0,20 K$ (rote durchgezogene Linie). (b) Analog zur Probe M1 ergibt sich eine T^2 -Abhängigkeit für $T > 30 K$.

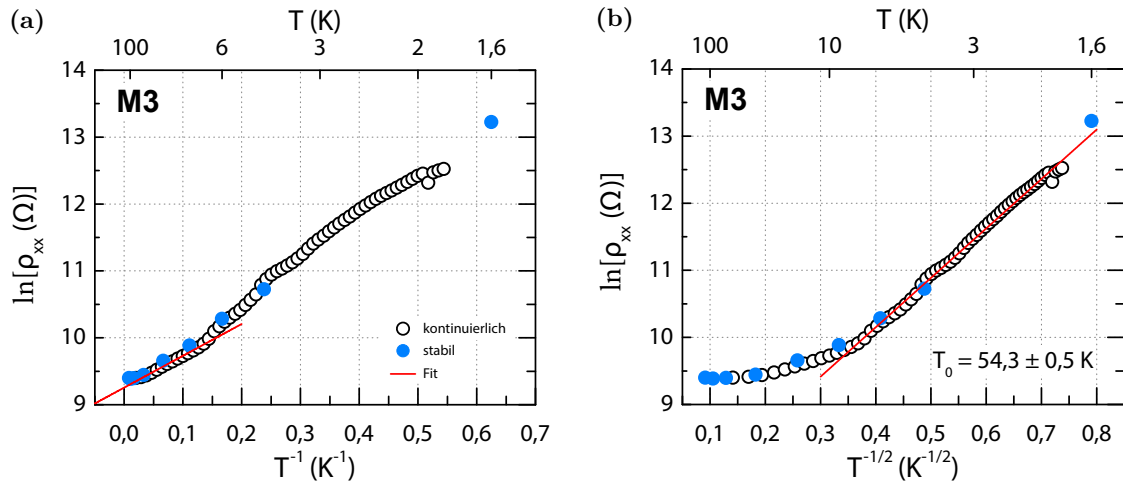


Abbildung 4.4 Widerstandsverlauf als Funktion der Temperatur der Probe M3 bei Annahme von (a) NNH für $T > 7,4 K$ und (b) ES-VRH für $T < 7,4 K$.

Die Untersuchung der Probe M3 nach der Methodik von Zabrodskii und Zinoveva offenbart einen Übergang des Transportregimes von NNH zu ES-VRH. Die Abbildung 4.6(a) zeigt den Übergang bei etwa 7,4 K. Für die Exponenten ergeben sich dabei die Werte $x = 0,48 \pm 0,09$ ($T < 7,4 K$) und $x = 1,04 \pm 0,1$ ($T > 7,4 K$).

Aus [Abbildung 4.4\(a\)](#) kann mit der [Gleichung 2.71](#) für die Aktivierungsenergie der Wert $W = 0,403 \text{ meV}$ berechnet werden. Im Bereich tiefer Temperatur ergibt sich bei Annahme von ES-VRH nach [Gleichung 2.71](#) $T_0 = 54,28 \text{ K}$.

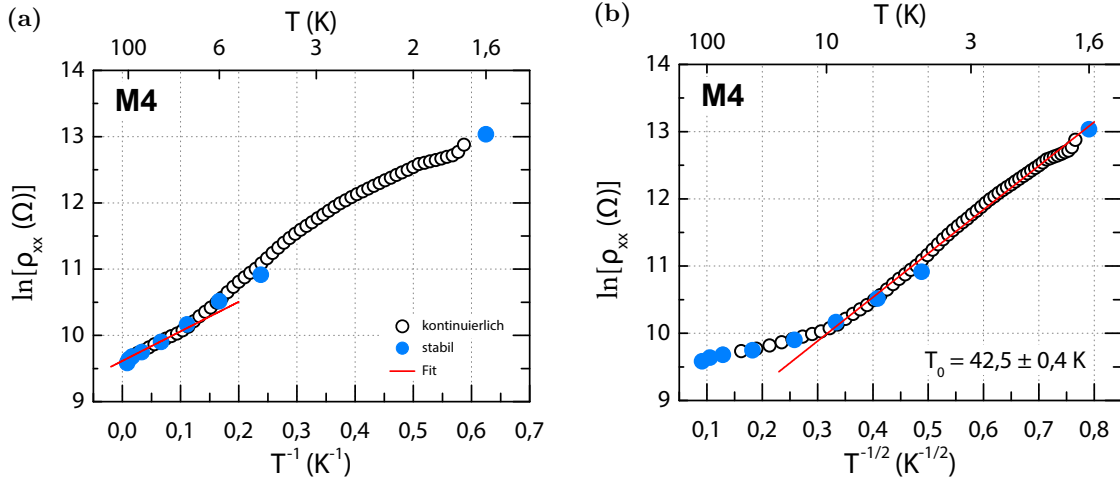


Abbildung 4.5 Widerstandsverlauf als Funktion der Temperatur der Probe M4 bei Annahme von (a) NNH für $T > 8,8 \text{ K}$ und (b) ES-VRH für $T < 8,8 \text{ K}$.

Ebenso zeigt auch die Probe M4 in [Abbildung 4.6\(b\)](#) einen Übergang vom NNH-Regime zum ES-VRH bei etwa $T = 8,8 \text{ K}$. Für den jeweiligen Abschnitt ist mit den Werten $x = 0,46 \pm 0,05$ ($T < 8,8 \text{ K}$) und $x = 1,05 \pm 0,1$ ($T > 8,8 \text{ K}$) eine eindeutige Zuordnung zu einem Transportregime möglich. [Abbildung 4.5](#) stellt den jeweiligen Widerstandsverlauf unter Annahme der genannten Regime dar, wobei der entsprechende Temperaturabschnitt unter Anwendung der gültigen Transportformel sehr gut angefitet werden kann. Für die Aktivierungsenergie bei NNH ergibt sich $W = 0,385 \text{ meV}$, für die spezifische Temperatur bei ES-VRH $T_0 = 42,51 \text{ K}$.

Aus dem materialspezifischen Fitparameter T_0 der ES-VRH-dominierten Bereiche, lässt sich für die Proben die Lokalisierungsgröße ξ_{loc} , die temperaturabhängige optimale Hoppinglänge R_{hop} und die Hoppingenergie Δ_{hop} ermitteln [[146](#), [147](#)]:

$$\xi_{loc} = \frac{2^{7/2}}{k_B T_0 (\pi g_1)^{1/2}} \quad \text{mit} \quad g_1 = \frac{2^{11} \pi \epsilon_r^2 \epsilon_0^2}{3^4 e^4}, \quad (4.7)$$

$$R_{hop}(T) = 0,25 \cdot \xi_{loc} \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2}, \quad (4.8)$$

$$\Delta_{hop}(T) = 0,5 \cdot k_B \cdot (T_0 T)^{1/2}. \quad (4.9)$$

Die berechneten Werte sind in [Tabelle 4.1](#) am Ende des Abschnitts zusammengefasst.

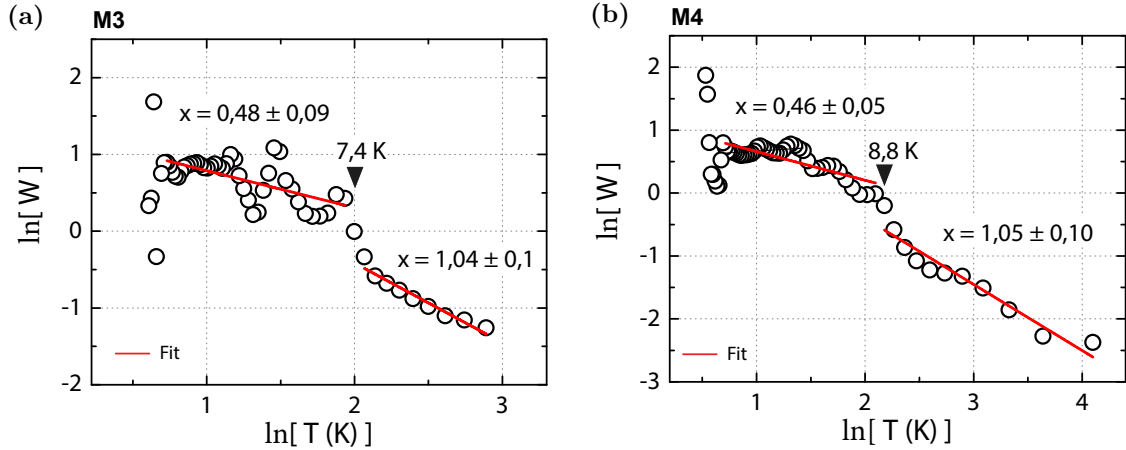


Abbildung 4.6 Die logarithmierte Ableitung W der Proben M3 und M4 in der Darstellung $\ln(W)$ vs. $\ln(T)$. Der Exponent x ist durch die Steigung der Kurve gegeben. Erkennbar sind zwei Abschnitte mit unterschiedlicher Steigung. Der Übergang ist bei (a) 7,4 K (probe M3) und (b) 8,8 K (Probe M4) zu erkennen.

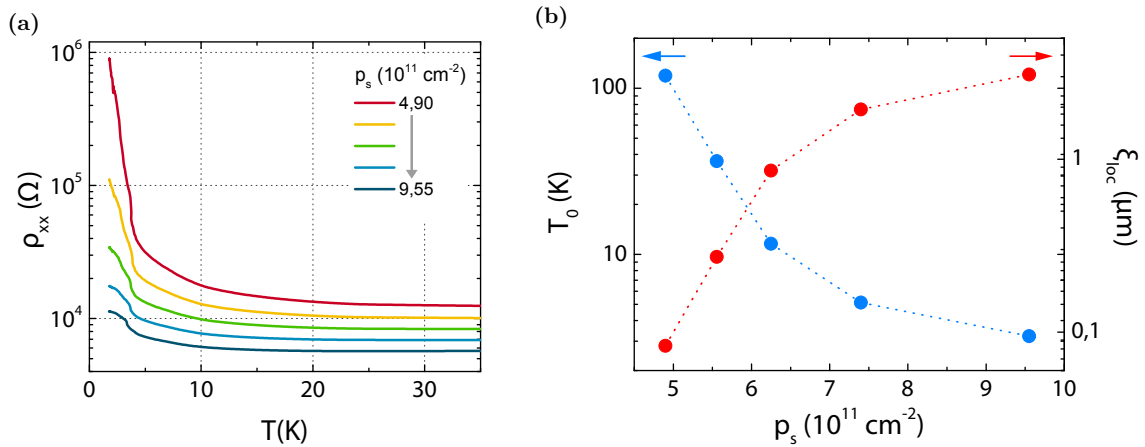


Abbildung 4.7 (a) Widerstand der Probe M2 in Abhängigkeit von T zwischen völliger Verarmung und maximaler Anreicherung der Ladungsträger durch eine Gateelektrode. (b) Spezifische Temperatur T_0 und Lokalisierungsgröße ξ_{loc} als Funktion der Ladungsträgerdichte p_s unter der Annahme von ES-VRH.

Zuletzt wurde die Ladungsträgerdichte unter Ausnutzung des Feldeffektes mit einer Gateelektrode variiert. Diese Messungen geben die Möglichkeit, verschiedene Lokalisierungsgrade in einer Probe bei unveränderter Mn-Konzentration zu untersuchen. Durch Verarmung oder Anreicherung der Ladungsträger im QW kann das Verhältnis von magnetischen Störstellen zu Ladungsträgern (N_0^{qw}/p_s) beeinflusst werden. [Abbildung 4.7\(a\)](#) zeigt, repräsentativ für die übrigen Proben, deutlich, dass der Lokalisierungseffekt durch Verdrängung der Löcher enorm gesteigert werden kann. Unter Annahme von ES-VRH ergibt die Berechnung der Lokalisierungsgröße für die

einzelnen Abkühlkurven eine starke Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte p_s bzw. dem Verhältnis N_0^{qw}/p_s ([Abbildung 4.7\(b\)](#)). Zwischen kompletter Verarmung und größtmöglicher Anreicherung der Löcher variiert ξ_{loc} über drei Größenordnungen.

4.1.2 Diskussion

Die experimentellen Resultate der vier Proben belegen, dass der Transport im untersuchten System bei tiefen Temperaturen ($T < 15$ K) im Regime des ES-VRH stattfindet. Für höhere Temperaturen zeigen die Proben M1 und M2 eine T^2 -Abhängigkeit und die Proben M3 und M4 gehen mit steigender Temperatur in das NNH-Regime über. Viele Veröffentlichungen deuten darauf hin, dass ES-VRH typischerweise in granularen und stark ungeordneten Materialien zu finden ist [[148–151](#)]. Auch das Auftreten in zweidimensionalen Systemen, wie beispielsweise in GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen, wurde bereits experimentell bestätigt [[152–154](#)]. Belegt sind ebenfalls Übergänge zwischen Hopping-Regimen, wie sie auch in der vorliegenden Arbeit beobachtet wurden. Zumeist wechselt das Widerstandsverhalten von Mott-VRH mit sinkender Temperatur zu ES-VRH [[155–159](#)]. Allerdings wurden Übergänge auch von NNH zu ES-VRH bereits experimentell bestätigt [[140](#)]. Insoweit sind die vorliegenden Resultate mit den bisherigen Erkenntnissen konsistent.

Die konkreten quantitativen Ergebnisse müssen jedoch differenzierter betrachtet werden. Die aus der Anpassung der Widerstandsverläufe gewonnenen Lokalisierungslängen nehmen mit steigender Mn-Konzentration ab. Das erscheint plausibel, da mit der wachsenden Störstellenkonzentration im Quantentrog auch die Unordnung im System ausgeprägter wird. Allerdings sind die ermittelten Werte vergleichsweise hoch. In gängigen DMS-Systemen [[149](#)] liegen sie in der Regel im Bereich des Atomradius. Konträr dazu berichten einige Veröffentlichungen auch von einer divergierenden Lokalisierungslänge bei Systemen in der Nähe des MIT [[152, 155, 160, 161](#)].

Möglicherweise entsteht bei der Berechnung der Lokalisierungslänge jedoch eine Überbewertung, die von der statischen Dielektrizitätskonstante ϵ_r ausgeht. Nach [Gleichung 4.7](#) hängt die Lokalisierungslänge umgekehrt proportional von ϵ_r ab. Bei der Berechnung wurde der Literaturwert für InAs $\epsilon_r = 15,15$ angenommen. Diese Annahme ist nur bedingt korrekt, da neben der dielektrischen Konstante des Wirtskristalls noch ein anomaler Anteil hinzukommen kann [[161](#)]:

$$\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon_r + 4\pi p a_0 \left(1 - \frac{p}{p_c}\right)^{-\nu}. \quad (4.10)$$

Hierbei ist p_c die kritische Ladungsträgerdichte des MIT, a_0 die Polarisierbarkeit der Akzeptoren, p die Ladungsträgerdichte und $\nu \simeq 1$. Der zusätzliche Term kann im Bereich des MIT auch deutlich höher als ϵ_r werden [[160–162](#)]. Weitere mögliche Einflussfaktoren wären die Anpassung der numerischen Vorfaktoren im Parameter

g_1 der Gleichung 4.7 oder die Modifizierung des Widerstandsmodells durch die Einbeziehung weiterer, bisher unberücksichtigter Prozesse.

Die Beobachtung der temperaturabhängigen Skalierung des Widerstandes ist nur ein Indiz für das Auftreten von Hopping-Leitung. Formal müssen weitere Rahmenbedingungen erfüllt sein. Demnach muss die durchschnittliche Hoppinglänge $R_{hop}(T)$ die Lokalisierungsgröße ξ_{loc} übersteigen:

$$R_{hop}(T)/\xi_{loc} > 1 . \quad (4.11)$$

Die Analyse dieser Bedingung führt bei unseren Proben zu unrealistischen Ergebnissen (Tabelle 4.1). Für die Proben M3 und M4 ist dieses Kriterium bis etwa 3 K erfüllt, für die Proben M1 und M2 lediglich bis 0,2 K. Das ist widersprüchlich zu dem vorliegenden Verhalten. Ein ähnlicher Widerspruch findet sich beispielsweise bei Zhang et al. [155], wobei er auch in diesem Fall nicht aufgelöst werden konnte. Als zweites Kriterium im Falle von ES-VRH wird vorausgesetzt, dass die Coulomb-Lücke Δ_C größer als die durchschnittliche Hoppingenergie $\Delta_{hop}(T)$ ist:

$$\Delta_C > \Delta_{hop}(T) . \quad (4.12)$$

Erst in diesem Fall wird die Coulomb-Wechselwirkung für den Transport relevant. Die Coulomb-Lücke ist dabei für 2D über die ungestörte Zustandsdichte $N(E_F)$ des 2DHG an der Fermi-Kante und wiederum über ϵ_r [146] definiert:

$$\Delta_C = \frac{e^4 N(E_F)}{(\epsilon_0 \epsilon_r)^{1/2}} . \quad (4.13)$$

Mit der Gleichung 2.5 und $\epsilon_r = 15,15$ ergibt sich $\Delta_C = 2,97 \text{ eV}$. Verglichen mit den Werten in Tabelle 4.1 ist diese Bedingung gut erfüllt. Dabei soll nicht unerwähnt bleiben, dass sich Δ_C üblicherweise in der Größenordnung von einigen meV ausbildet. Hier ist eine Ungenauigkeit im Ergebnis abermals durch ϵ_r gegeben.

Abschließend wird noch auf die Übergangstemperatur zwischen NNH und ES-VRH der Proben M3 und M4 eingegangen. Zur Ermittlung einer kritischen Temperatur T_c , an der ein Übergang stattfindet, betrachtet man die von Mott und Davis vorgeschlagenen [142] Beziehungen:

$$r/\xi_{loc} < W/k_B T \quad (\text{VRH}) , \quad (4.14)$$

$$r/\xi_{loc} > W/k_B T \quad (\text{NNH}) . \quad (4.15)$$

Ein Übergang findet bei einer kritischen Temperatur T_c im Fall von $r/\xi_{loc} = W/k_B T_c$ statt. Damit ergeben sich, mit Gleichung 4.2 und dem aus Abbildung 4.4 bzw. 4.5 ermitteltem Parameter W , die Werte $T_c < 138 \text{ K}$ für Probe M3 respektive $T_c < 168 \text{ K}$ für Probe M4 und damit eine im Vergleich zum experimentellen Resultat viel zu

Tabelle 4.1 Zusammenfassung aller ermittelten Parameter. Werte in Klammern ergeben sich aus einem alternativen Fit. Für weiterführende Berechnungen wurden alternative Werte nicht berücksichtigt. Für alle Berechnung wurde $\epsilon_r = 15,15$ gesetzt und die Lokalisierungslänge zusätzlich in einer ϵ_r -unabhängigen Form angegeben ($\epsilon_r \xi_{loc}$).

#	T_0 (K)	ξ_{loc} (nm)	$\epsilon_r \xi_{loc}$ (μm)	R_{hop}/ξ_{loc}	Δ_{hop} (meV)
M1	2,49	3981,8	60,3	$0,39 \cdot T^{-1/2}$	$0,068 \cdot T^{1/2}$
M2	5,47 (9,18)	1814,7 (1081,3)	27,5	$0,58 \cdot T^{-1/2}$	$0,101 \cdot T^{1/2}$
M3	54,28	182,88	2,77	$1,84 \cdot T^{-1/2}$	$0,317 \cdot T^{1/2}$
M4	42,51	233,52	3,54	$1,63 \cdot T^{-1/2}$	$0,281 \cdot T^{1/2}$

hohe Übergangstemperatur. Diese Ergebnisse sind auch in [Tabelle 4.2](#) zusammengefasst. Die Diskrepanz zwischen T_c^{theo} und T_c^{exp} kann durch die vermeintlich zu hohen Werte für ξ_{loc} erklärt werden. Demnach ist die gemessene Lokalisierungslänge etwa um eine Größenordnung zu hoch, um eine gute Übereinstimmung zwischen T_c^{theo} und den experimentellen Werten zu erzielen. Hierbei sei allerdings auch angemerkt, dass $N_0 < 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ aus [Gleichung 4.2](#), wodurch sich r berechnet, lediglich ein oberer Grenzwert ist und damit deutlich kleiner sein kann.

Hierbei sei angemerkt, dass der berechnete Abstand zwischen zwei Störstellen r , in Ermangelung der Kenntnis über den genauen Wert von N_0 , nur ein unterer Grenzwert ist. Ein größerer Abstand r würde zu einer geringeren Übergangstemperatur führen. Qualitativ korrekt ist die Tatsache wiedergegeben, dass Probe M3 eine geringere Übergangstemperatur aufweist als Probe M4, was sich rechnerisch aus der geringeren Lokalisierungslänge ergibt.

Tabelle 4.2 Aktivierungsenergie des NNH und theoretischer bzw. experimenteller Wert der kritischen Übergangstemperatur zwischen NNH und VRH

#	W (meV)	T_c^{theo} (K)	T_c^{exp} (K)
M3	0,403	< 138	7,4
M4	0,385	< 168	8,8

Zusammenfassend ist unter Berücksichtigung aller Erkenntnisse davon auszugehen, dass die qualitativen Aussagen bezüglich des Auftretens von ES-VRH und des Übergangs zwischen Hopping-Regimen korrekt sind, jedoch möglicherweise die ermittelten Lokalisierungslängen zu groß ausfallen. Ursächlich kann hier allerdings auch die Nähe zum MIT sein.

4.2 Magnetfeldabhängige Messungen

4.2.1 Experimentelle Ergebnisse

Frühere Untersuchungen in dem vorliegenden Materialsystem zeigten bereits einen bei tiefen Temperaturen äußerst starken negativen Magnetowiderstand (NMR¹) [78]. Dieser tritt, wie in [Abbildung 4.8\(a\)](#) zu sehen, auch in den Proben M0–M4 auf. Dabei ist der NMR umso ausgeprägter, je höher der durch Segregation in den leitenden Kanal eingebrachte Mn-Anteil ist. Der Vergleich der einzelnen Messungen zeigt nicht nur einen stetig mit der Mn-Konzentration wachsenden Widerstand bei $B = 0$, sondern auch eine Zunahme der Widerstandsänderung bei angelegtem Magnetfeld. Die Widerstandsänderung kann dabei einen Bereich von bis zu 3 Dekaden überstreichen.

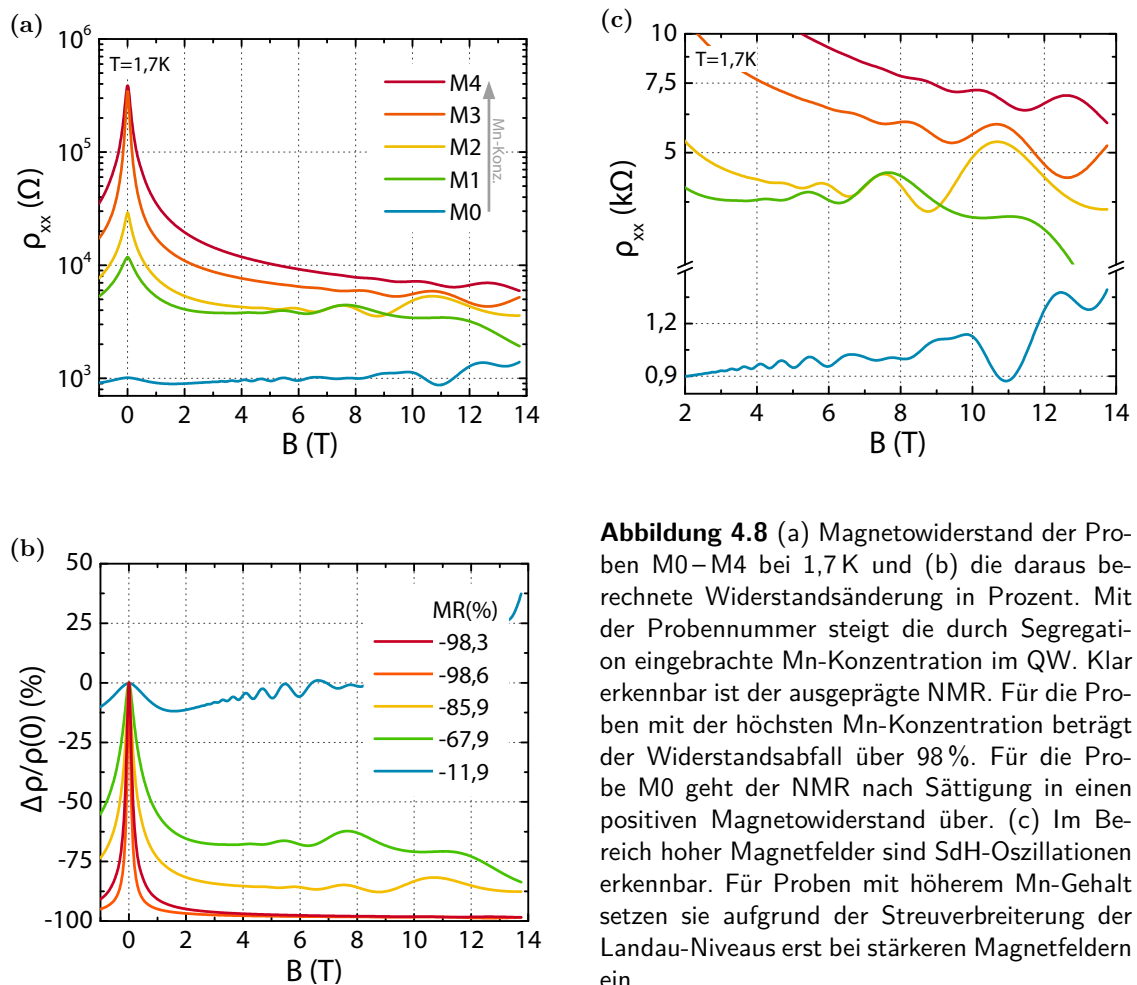


Abbildung 4.8 (a) Magnetowiderstand der Proben M0–M4 bei 1,7 K und (b) die daraus berechnete Widerstandsänderung in Prozent. Mit der Probennummer steigt die durch Segregation eingebrachte Mn-Konzentration im QW. Klar erkennbar ist der ausgeprägte NMR. Für die Proben mit der höchsten Mn-Konzentration beträgt der Widerstandsabfall über 98 %. Für die Probe M0 geht der NMR nach Sättigung in einen positiven Magnetowiderstand über. (c) Im Bereich hoher Magnetfelder sind SdH-Oszillationen erkennbar. Für Proben mit höherem Mn-Gehalt setzen sie aufgrund der Streuverbreiterung der Landau-Niveaus erst bei stärkeren Magnetfeldern ein.

¹Negative magnetoresistance.

Zur Beschreibung der Stärke eines magnetoresistiven Effektes wird häufig der Quotient $\Delta\rho/\rho(0) = (\rho(B) - \rho(0))/\rho(0)$ gebildet und in Prozent angegeben, wobei $\rho(0)$ der magnetfeldfreie Widerstand ist. Für die Proben M1 – M4 ergibt sich damit eine maximale relative Widerstandsänderung von $-67,9\%$ bis $-98,3\%$ (Abbildung 4.8(b)). Eine Ausnahme bildet die Probe M0, bei der aufgrund der deutlich geringeren Temperatur der Mn-Zelle beim MBE-Wachstum (siehe 3.1) ein geringerer Mn-Gehalt im leitenden Kanal anzunehmen ist. Die Stärke des NMR fällt dadurch mit einem Wert von $-11,9\%$ merklich geringer aus und geht nach der Sättigung bei etwa 1 T, sobald die SdH-Oszillationen einsetzen, in einen positiven Magnetowiderstand über. Der NMR in Probe M1 und M2 sättigt bei etwa 3 T bzw. 5 T. Bei den Proben M3 und M4 hält der Widerstandsabfall selbst bei 14 T noch weiter an.

In Abbildung 4.9 wird die starke Temperaturabhängigkeit des NMR in diesem Materialsystem untersucht. Während der Nullfeldwiderstand, wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, exponentiell mit steigender Temperatur abnimmt, ist der Widerstand bei etwa 6 T nur noch im geringen Maße (Abbildung 4.9(a)) temperaturabhängig. Das führt dazu, dass die NMR-Stärke mit steigender Temperatur nachlässt. Im Falle der Probe M4 beträgt sie z. B. bei 9 K nur noch $-65,4\%$ (Abbildung 4.9(b)).

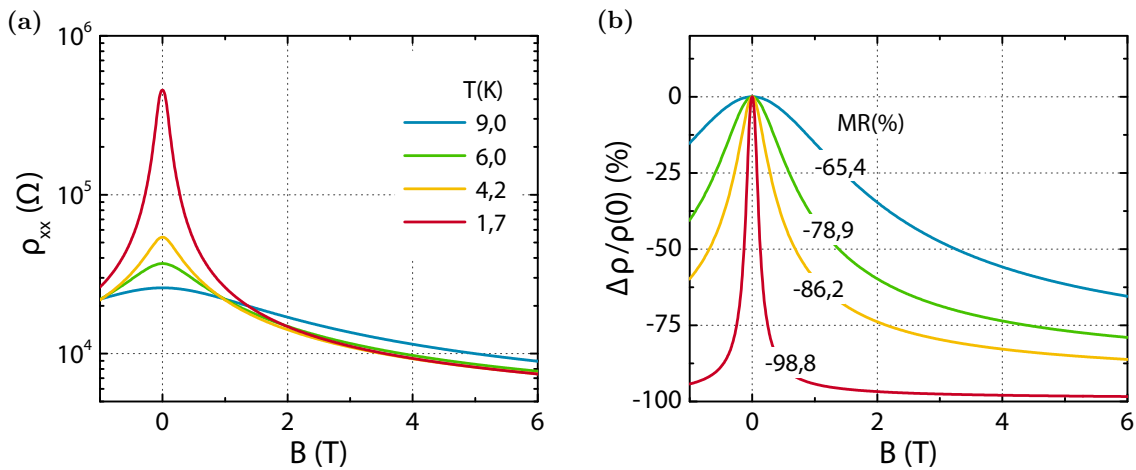


Abbildung 4.9 Einfluss der Temperatur auf den NMR: Widerstand der Probe M4 als Funktion des Magnetfeldes für verschiedene Temperaturen in der (a) absoluten und (b) relativen Darstellung.

Darüber hinaus wird der Magnetowiderstand stark vom Verhältnis N_0^{qw}/p_s geprägt. Verarmt man die Ladungsträger im leitenden Kanal mit einer Gateelektrode, wie beispielsweise bei der Probe M2 in Abbildung 4.10, steigt die NMR-Stärke auf bis zu $99,4\%$ an. Eine Anreicherung der Ladungsträger führt zu einem verminderten NMR von $72,7\%$. Dies zeigt wie effektiv der Lokalisierungsgrad um $B=0$ durch Verdrängen von Ladungsträgern gesteigert werden kann, selbst bei einer Probe mit moderatem Widerstand. Im hohen Magnetfeldbereich ändert sich der Widerstand indes vergleichsweise wenig.

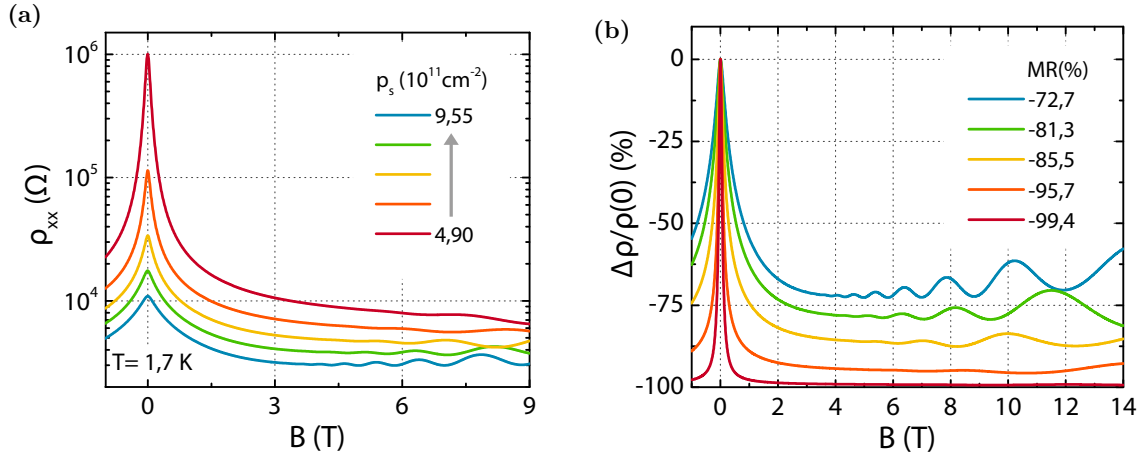


Abbildung 4.10 Einfluss einer Gateelektrode auf den NMR: (a) Magnetfeldabhängiger Widerstand der Probe M2 unter Variation der Ladungsträgerdichte mittels Gateelektrode. (b) Durch Veränderung des Verhältnisses Mn-Konzentration zu Ladungsträgerdichte kann die Stärke des NMR im Bereich 72,7–99,4 % variiert werden.

Neben starken Lokalisierungseffekten um $B = 0$ zeigen sich für höhere Magnetfelder Schubnikov-de-Haas-Oszillationen ([Abbildung 4.8\(c\)](#)). Mit zunehmendem Mn-Gehalt setzen die Oszillationen bei höheren Magnetfeldern ein. Dies ist auf die Streuverbreiterung Γ der Landau-Niveaus aufgrund von Störstellen zurückzuführen ([Abbildung 2.8\(b\)](#)). Hierbei gilt für Γ :

$$\Gamma = \hbar \sqrt{\frac{2\omega_c}{\pi\tau}} \propto \sqrt{B} . \quad (4.16)$$

Da ein höherer Mn-Gehalt zu einer geringeren Mobilität μ und damit zu einer verkürzten Streuzeit τ ([Gleichung 2.22](#)) führt, wächst die Streuverbreiterung [163]. Die SdH-Oszillationen werden sichtbar sobald einzelne Landau-Niveaus aufgelöst werden können. Dies ist der Fall, wenn der Abstand zweier Landau-Niveaus größer als die Landau-Niveau-Breite (2Γ) ist:

$$\hbar\omega_c = \hbar \frac{eB}{m^*} > 2\Gamma . \quad (4.17)$$

Demnach zeigen sich die SdH-Oszillationen bei sinkender Mobilität erst bei höheren Magnetfeldern.

4.2.2 Diskussion

Das Auftreten eines negativen Magnetowiderstandes und eine starke Temperaturabhängigkeit sind typisch für viele DMS-Systeme [13, 70, 164–166] und wesentlich stärker ausgeprägt als in nicht-magnetisch-dotierten Halbleitern. Jedoch tritt im vorliegenden System der NMR in einer selbst für DMS ungewöhnlichen Ausprägung auf. In den einschlägigen Veröffentlichungen ist in solchen Fällen die Bezeichnung „giant negativ magnetoresistance“ oder „colossal negative magnetoresistance“ gebräuchlich.

Die Theorie von Fukuyama und Yoshida [63] liefert eine mögliche Erklärung für einen NMR dieser Größenordnung. Das Modell führt dabei vor allem in der Nähe des MIT zu einem starken Effekt. Die Autoren beschreiben, ausgehend vom Transport im Variable-Range-Hopping-Regime, die Magnetfeldabhängigkeit des Systems unter der Anderson-Lokalisierung mit einem spinabhängigen Zwei-Kanal-Modell. Die Leitfähigkeit ist darin gegeben durch:

$$\sigma_{xx}(B, T) = \frac{\sigma_0}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \exp \left[\left(\frac{T_\sigma}{T} \right)^x \right] \quad (4.18)$$

mit

$$T_\sigma(E) = T_0 \left(E_F + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma \right) \quad (4.19a)$$

$$\propto \left[E_m - \left(E_F + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma \right) \right]^{\beta d}. \quad (4.19b)$$

Dabei ergibt sich der Exponent x analog zum Mott-VRH durch die Dimensionalität d der Probe. T_σ entspricht der charakteristischen Temperatur T_0 des VRH-Modells, jedoch wird jedem Spinkanal eine eigene, energieabhängige charakteristische Temperatur zugeordnet. Zur näheren Erläuterung der Proportionalität sei auf [63] verwiesen. Weiterhin ist E_m die Mobilitätskante, g der Landé-Faktor, und β ein charakteristischer Exponent mit $\beta \sim 1$. Es ist noch anzumerken, dass σ_0 nicht die Nullfeldleitfähigkeit ist. Durch die Zeeman-Energie $\frac{1}{2} g \mu_B B \sigma$ kann der Parameter T_σ über ein externes Magnetfeld beeinflusst werden. Das wirkt sich dementsprechend auf die Transporteigenschaften aus. Dabei wird davon ausgegangen, dass $E_m - E_F$ nur eine geringe Magnetfeldabhängigkeit aufweist [63]. Es wird auch deutlich, dass die Gleichung 4.18 stets zu einem negativen Magnetowiderstand führt. Die Magnetfeldabhängigkeit des Widerstandes ergibt sich in einem solchen System nach [61, 63] bei schwachen Feldern zu

$$\rho_{xx} \propto B^{-2} \quad (4.20)$$

und starken Feldern zu

$$\rho_{xx} \propto B^{-1}. \quad (4.21)$$

Das charakteristische Magnetfeld B_c , an dem ein Übergang zwischen diesen beiden Skalierungsrelationen stattfindet, ist dabei gegeben durch [63]:

$$\frac{1}{2}g\mu_B B_c = \sqrt{2}\frac{n}{\beta d} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/n} (E_m - E_F). \quad (4.22)$$

Im tiefsten Temperaturbereich, in dem der Widerstand typischerweise hoch ist, kann B_c sehr klein werden. Üblicherweise liegt es bei einer Temperatur von 1 K im Bereich einiger 100 mT [63]. Tatsächlich findet man bei den Proben M1–M4 einen zu $1/B$ proportionalen Widerstandsverlauf. Die Skalierungsrelation verliert jedoch für kleine Magnetfelder seine Gültigkeit, ohne dass sich der Zusammenhang $\rho_{xx} \propto B^{-2}$ einstellt (Abbildung 4.11). Im Hochfeldbereich bricht die Proportionalität ab sobald der NMR sättigt. Da für die Proben M3 und M4 zumindest bis 14 T keine Sättigung eintritt, hat die Skalierungsrelation bis zu diesem Magnetfeld Bestand.

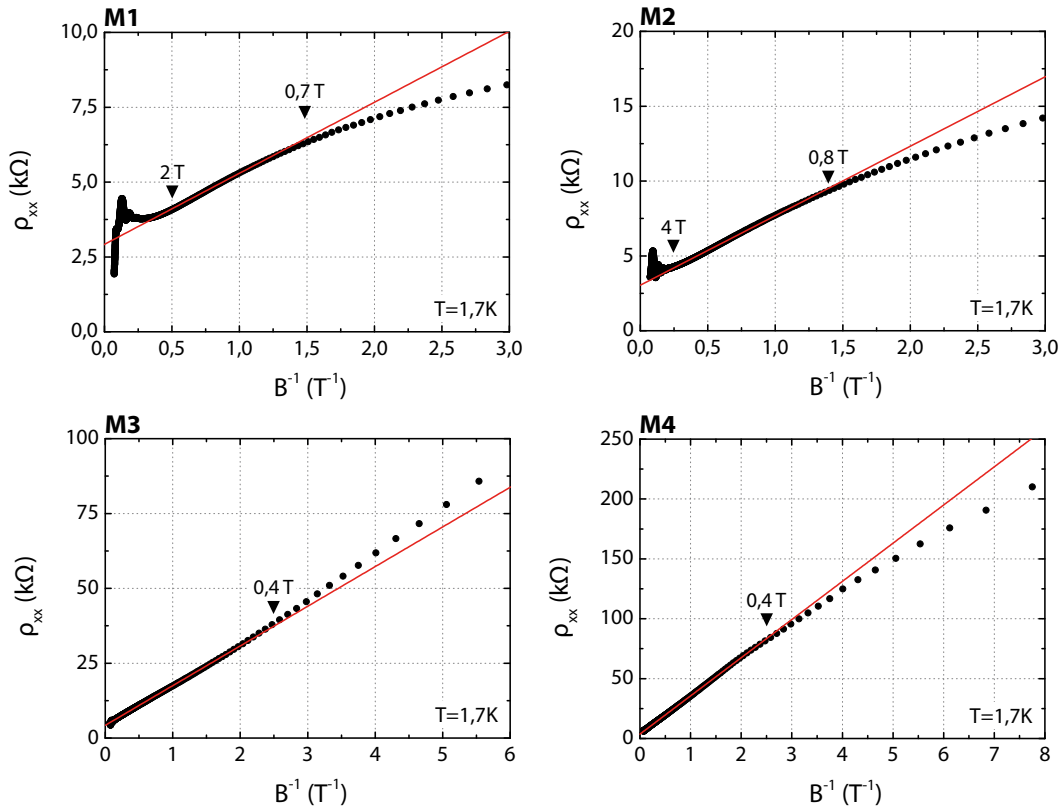


Abbildung 4.11 Widerstand der Proben M1–M4 als Funktion des inversen Magnetfeldes nach der Modellvorstellung von Fukuyama und Yoshida. Die Pfeile veranschaulichen die Bereiche guter Übereinstimmung mit der (roten) linearen Regressionslinie.

Trotz der guten Übereinstimmung gibt es Gründe die gegen die Anwendbarkeit des Modells für unser System sprechen. Der Zeeman-Effekt führt zu einem isotropen Magnetowiderstand. Die Untersuchung der Winkelabhängigkeit in [Abbildung 4.12](#) zeigt

jedoch eine starke Anisotropie des NMR bezüglich der Magnetfeldrichtung. Das wurde zuvor auch an anderen Proben im gleichen Materialsystem gezeigt [37]. Die Messung mit einem parallel zum 2DHG orientierten Magnetfeld liefert im Vergleich zur orthogonalen Messung weder die ausgeprägte Effektstärke noch den steilen Verlauf. Erklärungen, welche den NMR einzig auf die Spinaufspaltung der Leitungselektronen bzw. Valenzbandlücken zurückführen, sind demnach unbefriedigend. Vielmehr deuten die Messungen auf starke orbitale Effekte hin.

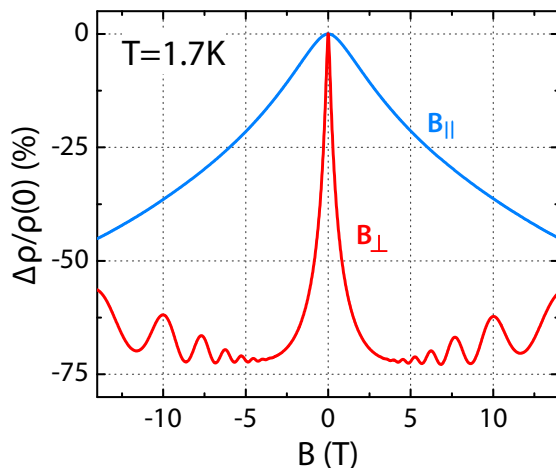


Abbildung 4.12 Vergleich des Magnetowiderstandes für Magnetfelder senkrecht (B_{\perp}) und parallel (B_{\parallel}) zur Probenebene anhand der Probe M2. Der NMR zeigt eine große Anisotropie bezüglich der externen Magnetfeldrichtung.

Ein weiterer Erklärungsansatz basiert auf der Entstehung von gebundenen magnetischen Polaronen (BMP) [73]. In diesem Modell ist jedes Loch von einer durch die p-d-Austauschkopplung polarisierten Mn-Wolke umgeben (siehe auch [Abschnitt 2.5.2](#)). Diese Spinwolke verstärkt die Bindungsenergie und verringert den Lokalisierungsradius. Die daraus resultierende spontane Spinaufspaltung der Ladungsträger ist proportional zum Betrag der lokalen Magnetisierung, die sich aus dem Molekularfeld des lokalisierten Ladungsträgers und den thermodynamischen Fluktuationen der Magnetisierung zusammensetzt [53]. Da das Hüpfen eines Ladungsträgers das Umklappen vieler Spins erfordert, sind BMPs stark lokalisiert. Erst das Anlegen eines externen Magnetfeldes macht die Ladungsträger aufgrund der graduellen Ausrichtung der Mn-Spins zunehmend mobiler. In zahlreichen Veröffentlichungen [13, 167–171] wird die Entstehung von BMPs für einen großen NMR verantwortlich gemacht. Typisch ist das Auftreten von BMPs in Systemen, bei denen mehrere Mn-Spins auf einen lokalisierten Ladungsträger kommen. Für das untersuchte System ist dies nur schwer abzuschätzen und könnte aufgrund der geringen Dotierkonzentration unter Umständen nicht gegeben sein. Parallel ist ein weiterer Mechanismus, der ebenfalls mit der p-d-Austauschwechselwirkung verknüpft ist, für das Auftreten eines starken NMR verantwortlich (siehe ebenfalls [Abschnitt 2.5.2](#)). Bei diesem kommt es aufgrund der Austauschwechselwirkung zur Umverteilung der Ladungsträger zwischen Spin-Teilbändern, was wiederum zur Vergrößerung des Bohr-Radius beiträgt [10, 72, 172]. Dieser Effekt ist besonders bei p-Typ DMS ausgeprägt [10]. Beide Mechanismen sind anisotrop bezüglich der Magnetfeldrichtung.

Nach Kaminski und Das Sarma [80] entspricht der Widerstand im BMP-Modell unter Anwesenheit eines externen Magnetfeldes der Form des aktivierten Hopping-transportes ($\rho_{xx} \propto \exp(\Delta E)/k_B T$), wobei ΔE die magnetfeldabhängige Änderung der Aktivierungsenergie ist. Mit dem mittleren Spin

$$\langle S \rangle = J \cdot B_J \left(\frac{S g \mu_B B}{k_B T} \right) \quad (4.23)$$

ergibt sich nach [80] die Energieänderung aus der Bindungsenergie E_{pol} der BMPs:

$$\Delta E = - \underbrace{8\pi J_0 a_B^3 N_0}_{E_{pol}} J B_J \left(\frac{S g \mu_B B}{k_B T} \right) . \quad (4.24)$$

Demnach hängt die Energieänderung von der Stärke der p-d-Austauschenergie J_0 , der Störstellendichte N_0 und dem Bohr-Radius a_B ab. Der resultierende Widerstand ist gegeben durch:

$$\rho_{xx}(B, T) = \rho_{xx}(0, T) \cdot \exp \left(- \frac{8\pi J_0 J a_B^3 N_0}{k_B T} B_J \left(\frac{S g \mu_B B}{k_B T} \right) \right) . \quad (4.25)$$

In verschiedenen Veröffentlichungen unterscheidet sich die Definition von E_{pol} geringfügig, wobei die prinzipiellen Proportionalitäten erhalten bleiben. Der zweite mit der p-d-Wechselwirkung verknüpfte Mechanismus liefert ebenfalls eine exponentielle Abhängigkeit von der Brillouin-Funktion unter Berücksichtigung des Bohr-Radius und des Austauschintegrals [72] und ist damit vergleichbar mit Gleichung 4.25. Da bei der Analyse der Messdaten E_{pol} als Fitparameter behandelt wird, spielen die Unterschiede im Detail keine Rolle.

Wie in Abbildung 4.13 zu sehen ist, kann die Gleichung 4.25 den Widerstandsverlauf nicht für alle Proben hinreichend wiedergeben. Alternativ wurde Probe M1 mit der formal ähnlichen Gleichung 2.72 angefitet, was zu einem vergleichbaren Ergebnis führt. Während die Anpassung der Proben M1 und M2 noch zufriedenstellend ist, gibt es bei den Proben M3 und M4 deutliche Abweichungen. Phänomenologisch ist das der Tatsache geschuldet, dass die Brillouin-Funktion bei einer Temperatur von 1,7 K bei etwa 2,5 T sättigt, die Proben M3 und M4 allerdings auch bei höheren Feldern einen sinkenden Widerstand aufweisen. Bei einer starken p-d-Austauschwechselwirkung kann es sinnvoll sein eine modifizierte Brillouin-Funktion anzunehmen, da die antiferromagnetische Kopplung der Löcher mit den Mn-Ionen der Ausrichtung der magnetischen Momente entgegenwirkt². Allerdings führte eine solche Annahme zu keiner Verbesserung der Fitresultate. Eine der Ursachen für die Diskrepanz zwischen Messung und Fit kann auch die Annahme sein, dass der in E_{pol} enthaltene Bohr-Radius bei einer Magnetfeldänderung konstant ist. Das ist

²Der Einfluss der p-d-Austauschwechselwirkung auf die Brillouin-Funktion ist in Abschnitt A.2 näher erläutert.

im Allgemeinen nicht korrekt. Vielmehr kann es bei hinreichend hohen Magnetfeldern zu einer Verkleinerung von a_B kommen [72]. Dem entgegen führen die zuvor beschriebenen Mechanismen zu einer Vergrößerung des effektiven Bohr-Radius. Berücksichtigt man diesen Umstand, kann der Fit mit der Ad-hoc-Annahme, dass sich die Magnetfeldabhängigkeit des Fitparameters E_{pol} durch eine Gleichung der Form

$$E_{pol} = E_0 + c_a \cdot B^\gamma \quad (4.26)$$

darstellen lässt, im Bereich hoher Magnetfelder deutlich verbessert werden (blaue Kurve in [Abbildung 4.13](#)). Geringe Abweichungen entstehen dadurch allerdings um $B = 0$. Selbstverständlich ist in Betracht zu ziehen, dass eine Verbesserung der Anpassung an die Messdaten lediglich auf das Hinzufügen weiterer Fitparameter

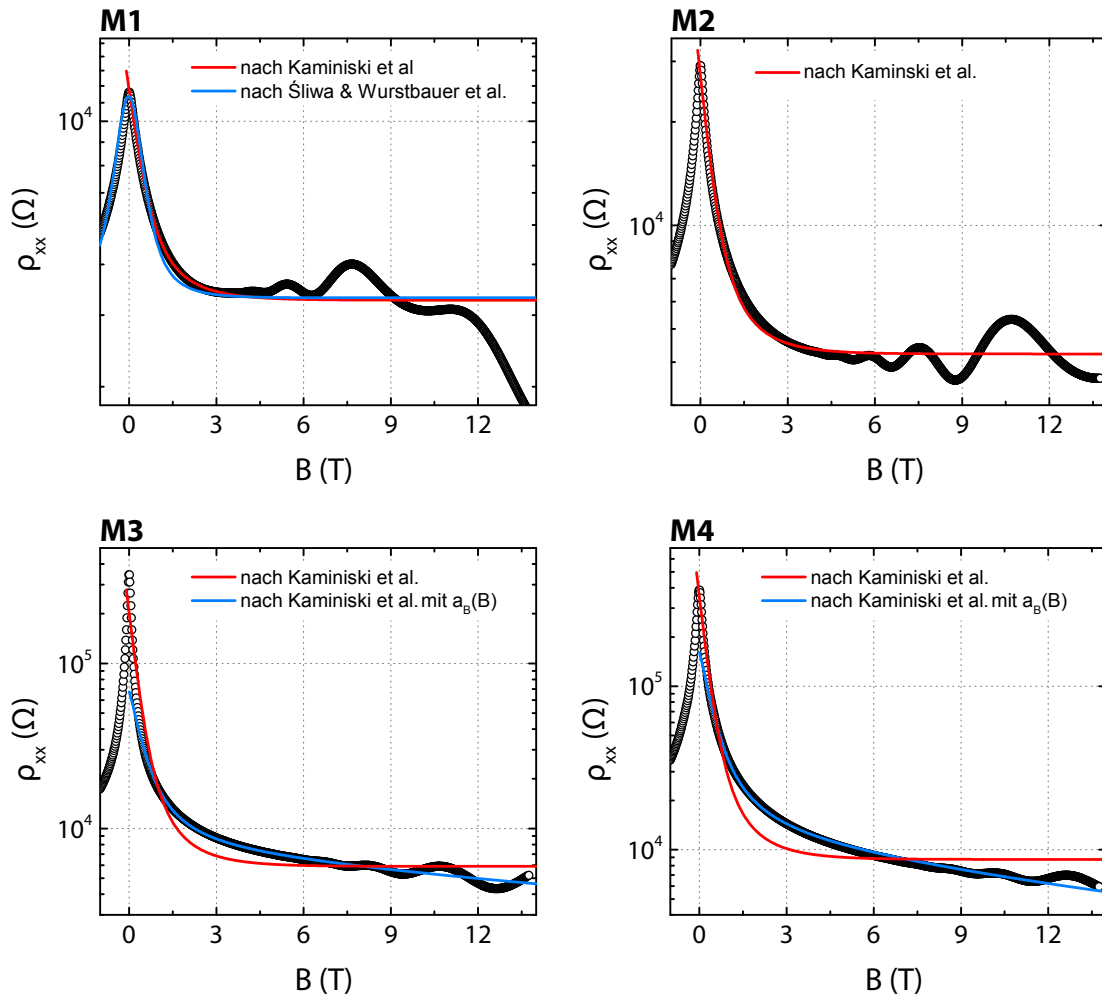


Abbildung 4.13 Widerstand der Proben M1–M4 als Funktion des Magnetfeldes bei 1,7 K. Rote Kurven sind die Anpassungen nach Gleichung 4.25 im Rahmen des BMP-Konzeptes. Blaue Kurven sind alternative Anpassungen nach Gleichung 2.72 (M1) und unter Annahme eines magnetfeldabhängigen Bohr-Radius nach Gleichung 4.26 (M3/M4).

zurückzuführen ist. Ebenso ist die Überlagerung eines weiteren, magnetfeldabhängigen Mechanismus möglich. Letztlich bleibt die genaue Bestimmung der Ursachen des NMR durch die Komplexität des Systems schwierig [173].

Die BMP-Bindungsenergie E_{pol} kommt im Bilde des Hopping-Transports der Aktivierungsenergie $T_0 k_B$ gleich. Folglich besteht zwischen beiden Größen ein Zusammenhang, der auch belegt werden kann. Dazu wird die Probe M2 betrachtet. Wie zuvor gezeigt, kann mit der Gatespannung auf den Lokalisierungsgrad Einfluss genommen werden, was sich einerseits auf den temperaturabhängigen Widerstand und T_0 (Abbildung 4.7), andererseits auf den NMR (Abbildung 4.10) auswirkt. Wird etwa das Verhältnis N_0^{qw}/p_s durch Verdrängung von Ladungsträgern erhöht, entspricht das einer stärkeren Kompensation der Löcher durch die magnetischen Störstellen. Damit wird die Neigung zum Ausbilden von BMPs verstärkt. Dies führt zu einer Erhöhung der Polaron-Bindungsenergie, wie das Inset in Abbildung 4.14 zeigt. E_{pol} wurde hier durch Anfitzen der Gleichung 4.25 an die Messkurven in Abbildung 4.10 ermittelt. Vergleicht man nun die Parameter E_{pol}/k_B und T_0 ergibt sich die Proportionalität

$$E_{pol} \propto T_0^\alpha \quad (4.27)$$

mit $\alpha = 0,37 \pm 0,02$ für die Probe M2 (Abbildung 4.14). Die gleiche Auswertung für die ebenfalls unter dem Einfluss einer Gateelektrode untersuchten Probe M3 ergibt $\alpha = 0,7 \pm 0,03$. Demzufolge ist α probenspezifisch. An dieser Stelle sei nochmal betont, dass T_0 aus den temperaturabhängigen Messungen in Abschnitt 4.1 und E_{pol} aus den magnetfeldabhängigen Messungen bei 1,7 K in diesem Abschnitt ermittelt wurde.

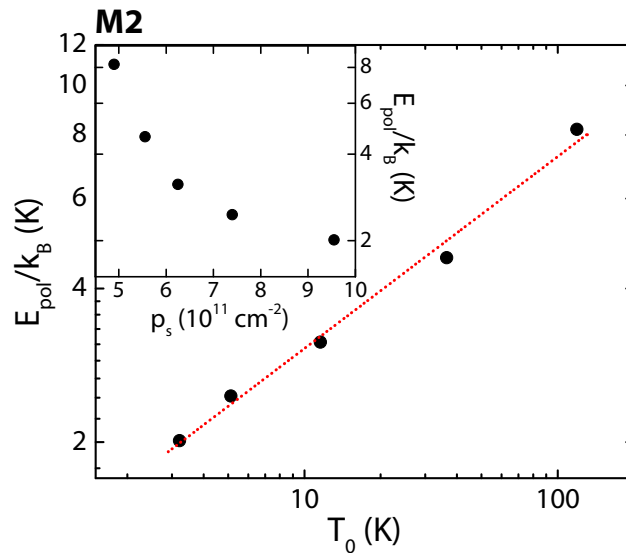


Abbildung 4.14 Zusammenhang zwischen BMP-Bindungsenergie E_{pol}/k_B (in Temperatureinheiten) und der spezifischen Temperatur des Hopping-Transports T_0 , exemplarisch an den gateabhängigen Messungen der Probe M2 gezeigt. Die Parameter wurden durch Auswertung der Abbildungen 4.7 und 4.10 ermittelt. Im Inset ist E_{pol}/k_B als Funktion der Ladungsträgerdichte p_s dargestellt.

Zuletzt betrachten wir den Widerstandsverlauf der Probe M0. Sie unterscheidet sich von den übrigen Proben durch die geringere NMR-Stärke. Wir nehmen an, dass der Magnetowiderstand in dieser Größenordnung seinen Ursprung in der Verringerung der Streuung durch die Ausrichtung der Spins im Magnetfeld hat [19]. Der streuabhängige Widerstand kann dabei durch die sogenannte „spin disorder scattering formula“ nach [174] beschrieben werden:

$$\rho_s = 2\pi^2 \frac{k_F}{p_s e^2} \frac{m^{*2} J_{pd}^2}{h^3} N_0 [S(S+1) - \langle S \rangle^2] . \quad (4.28)$$

Die Gleichung ist in der paramagnetischen Phase von DMS-Systemen gültig, in der nur eine geringe Spinkorrelation zwischen den einzelnen Mn-Spins herrscht. Der Gesamtwiderstand ergibt sich zu:

$$\rho_{xx}(B, T) = \rho_{res} + \rho_{ph}(T) + p_s(B, T) . \quad (4.29)$$

Hierbei ist ρ_{ph} der phononenabhängige Widerstandsbeitrag und ρ_{res} der konstante Restwiderstand bei $T = 0\text{ K}$. [Abbildung 4.15](#) zeigt eine sehr gute Anpassung der Gleichung an die Messdaten. Hierbei ergeben sich für die Fitparameter $A = \rho_{res} + \rho_{ph}(T) = 807,26\ \Omega$ und $B = 2\pi^2 k_F m^{*2} J_{pd}^2 N_0 / p_s e^2 h^3 = 23,32 \pm 0,07\ \Omega$. Setzt man für B die materialspezifischen Werte für M0 ein, erhält man $B_{theo.} = 12,6\ \Omega$. Dieses Ergebnis ist in der richtigen Größenordnung, beträgt allerdings nur etwa die Hälfte des experimentellen Befundes. Daneben ist zu beobachten, dass bei Einsetzen der SdH-Oszillationen der NMR sättigt und der Widerstand (im Mittel) linear ansteigt. Dieses Verhalten wurde beispielsweise bei hochbeweglichen QW-Heterostrukturen beobachtet [175–177] und wird an dieser Stelle nicht näher diskutiert.

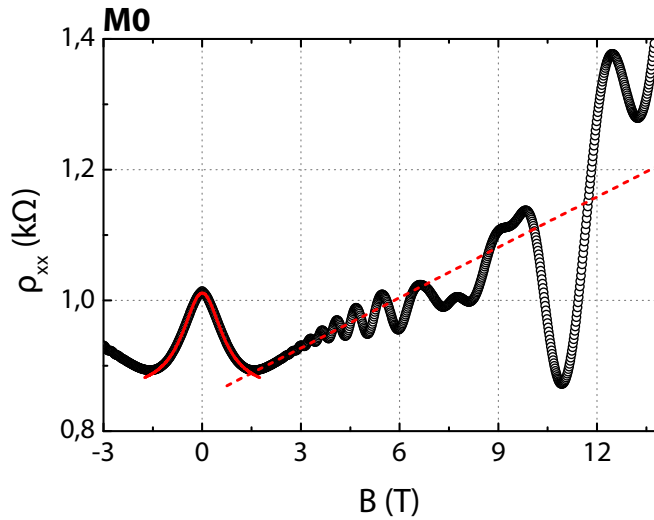


Abbildung 4.15 Widerstand der Probe M0 als Funktion des Magnetfeldes bei 1,7K. Rote durchgezogene Kurve ist die Anpassung nach [Gleichung 4.29](#). Rote gestrichelte Linie illustriert die lineare Regression des Widerstandes bei hohen Magnetfeldern.

4.3 Magnetfeld-induzierter Metall-Isolator-Übergang

Temperaturabhängige Widerstandsmessungen haben sich als gängige Methode zur Überprüfung metallischen oder isolierenden Verhaltens etabliert. Dabei ist, je nach Veröffentlichung, entweder die Steigung $d\rho_{xx}/dT$ bei tiefsten Temperaturen oder der nach $T = 0\text{ K}$ extrapolierte Widerstand bzw. Leitfähigkeit maßgebend für eine Zuordnung zu einer der Phasen [70, 106]. Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Konzepte zur Beurteilung des MIT. In [Abbildung 4.16](#) ist der MIT im Bilde beider Ansätze illustriert.

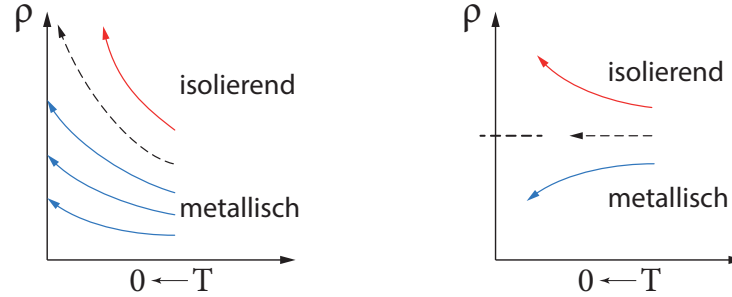


Abbildung 4.16 Zwei mögliche Definition für metallisches Verhalten: (links) $\rho_{xx}(T \rightarrow 0) > \infty$ (z. B. in [70]) und (rechts) $d\rho/dT > 0$ (z. B. in [106]).

In diesem Abschnitt werden die temperaturabhängigen Widerstandsmessungen für verschiedene Magnetfelder durchgeführt und das Transportverhalten nach beiden Konzepten analysiert. Dabei lässt sich ein kritisches (Übergangs-)Magnetfeld B_c ermitteln. Durch eine Analyse der voneinander abweichenden Ergebnisse im Kontext des Ioffe-Regel-Kriteriums kann eine der Vorgehensweisen präferiert werden. Zuletzt wird die Möglichkeit untersucht sämtliche magnetfeldabhängigen Abkühlkurven durch ein einheitliches Widerstandsmodell zu beschreiben.

4.3.1 Experimentelle Ergebnisse

Die Untersuchung des MIT umfasst Experimente an fünf Proben, die unterschiedliche Mn-Konzentration aufweisen, sowie Messungen an einzelnen Proben bei Variation der Ladungsträgerdichte mittels Feldeffekt. Für jede Einzelmessung wurde das Magnetfeld ausgehend von $B = 0\text{ T}$ variiert. Für eine erste Einschätzung des Transportverhaltens wird die durchschnittliche Steigung ρ_{xx}/dT über den gesamten Temperaturbereich betrachtet. Demnach liegt metallisches Verhalten vor, wenn der Widerstand bei $1,7\text{ K}$ geringer ist als bei 40 K ($d\rho/dT > 0$). Die Teilbilder haben zur besseren Vergleichbarkeit eine einheitliche Achsenskalierung. In [Abbildung 4.17](#) sind die Resultate der Abkühlkurven für die Proben M0–M4 dargestellt. Die Veränderung der Messkurven mit steigendem Magnetfeld ist geprägt durch den starken NMR der Proben. Der vergleichbare Kurvenverlauf ab $T \approx 30\text{ K}$ macht allerdings auch das schnelle Abklingen des NMR-Effekts mit steigender Temperatur deutlich.

Als wichtigste Erkenntnis zeigt sich eindeutig ein Übergang vom isolierenden zum metallischen Verhalten mit steigendem Magnetfeld. Lediglich die Probe M0 weicht von diesem Verhalten ab. Im Temperaturbereich 9–40 K sinkt bei dieser der Widerstand bei allen Magnetfeldwerten. Lediglich für $T > 9$ K erkennt man eine Aufspaltung der einzelnen Kurven. Der Widerstandswert bei 1,7 K bleibt jedoch selbst ohne angelegtes Magnetfeld unter dem Widerstand bei 40 K. Nach erster Einschätzung weist diese Probe daher in Gänze metallisches Verhalten auf. Im Bereich des MIT (Bereich mittlerer Magnetfelder) zeigen die Abkühlkurven ein wechselndes Verhalten. Je nach betrachtetem Temperaturbereich steigt oder sinkt der Widerstand.

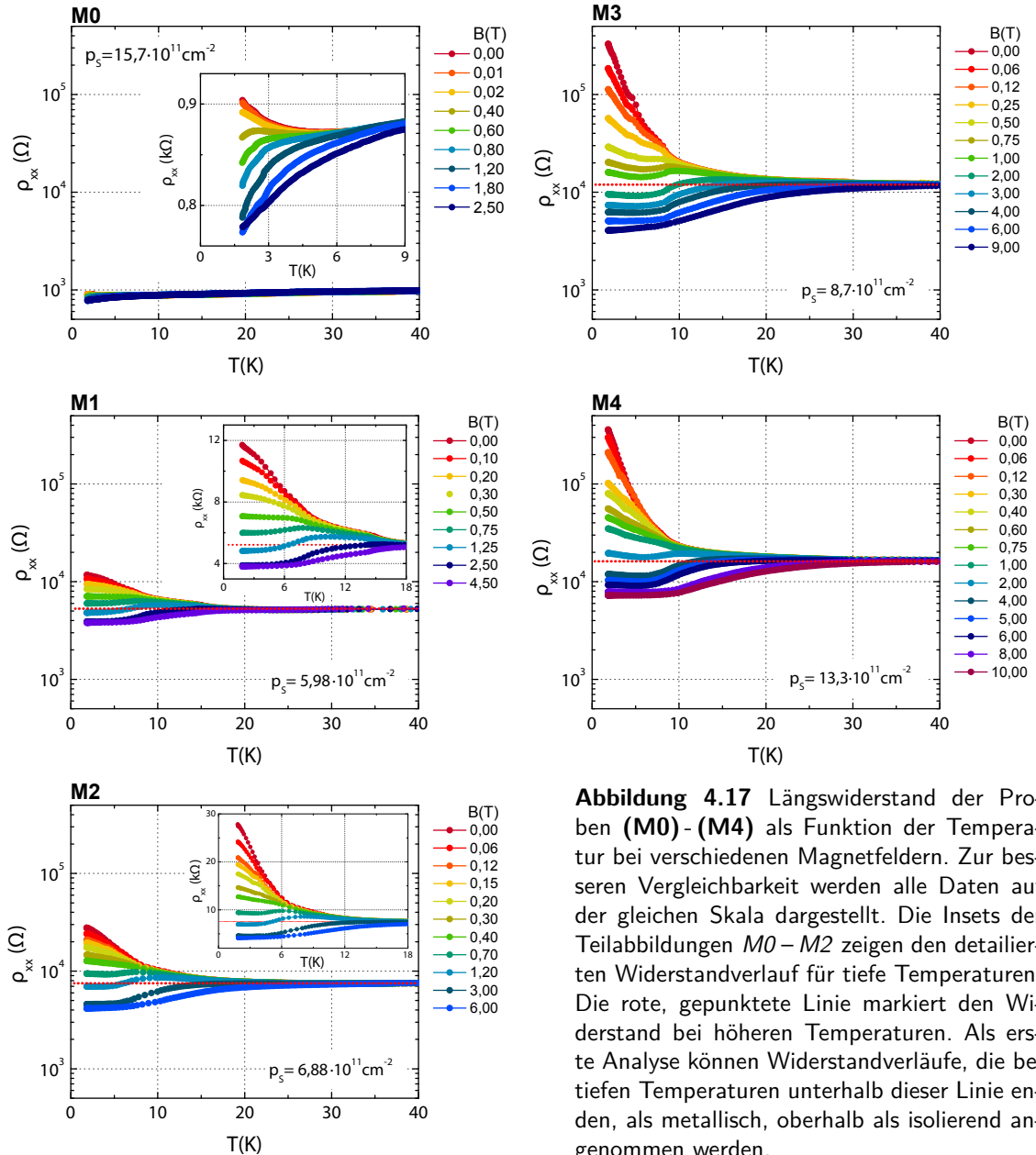


Abbildung 4.17 Längswiderstand der Proben (M0) - (M4) als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Magnetfeldern. Zur besseren Vergleichbarkeit werden alle Daten auf der gleichen Skala dargestellt. Die Insets der Teilabbildungen M0 – M2 zeigen den detaillierten Widerstandverlauf für tiefe Temperaturen. Die rote, gepunktete Linie markiert den Widerstand bei höheren Temperaturen. Als erste Analyse können Widerstandverläufe, die bei tiefen Temperaturen unterhalb dieser Linie enden, als metallisch, oberhalb als isolierend angenommen werden.

M3

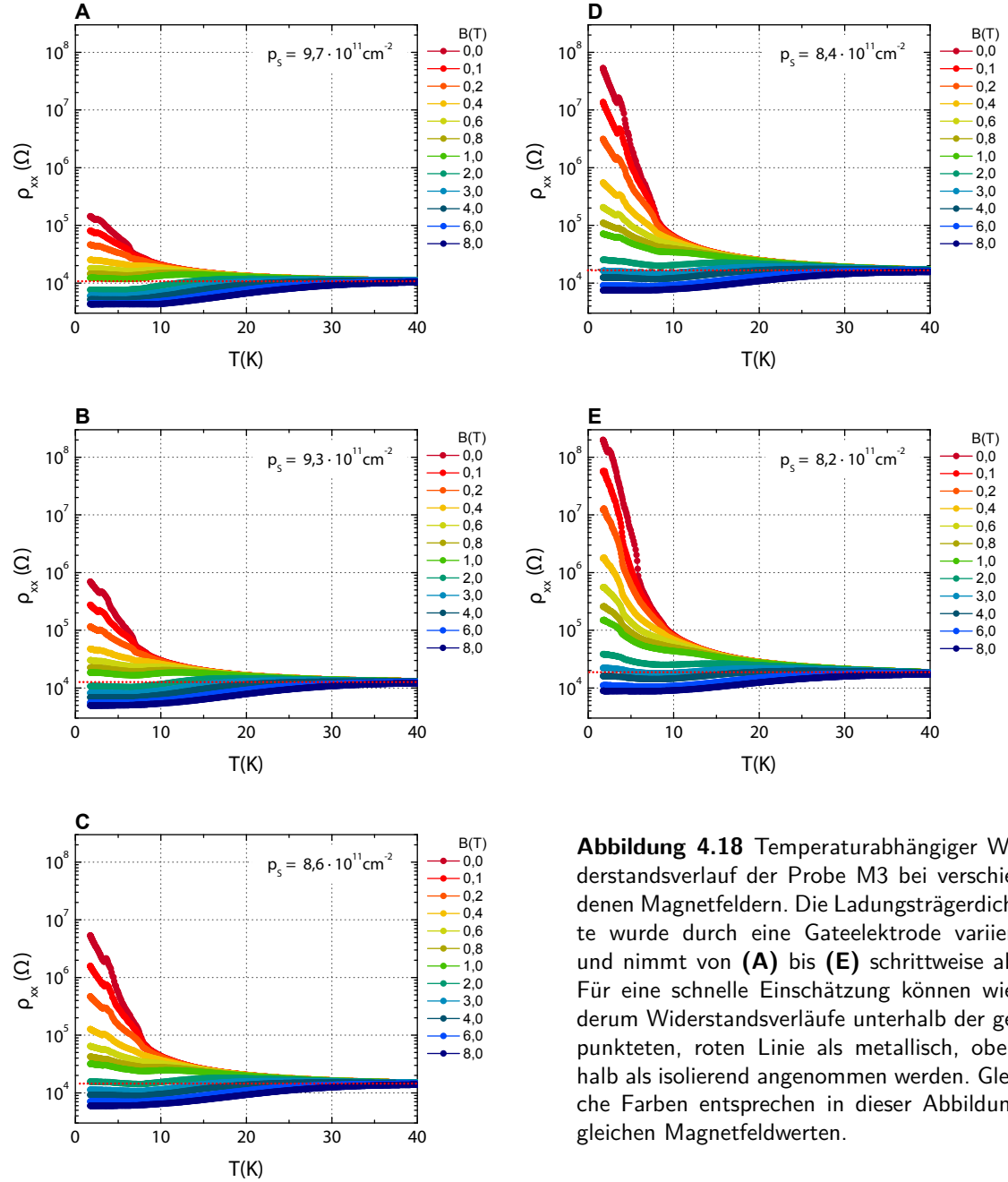


Abbildung 4.18 Temperaturabhängiger Widerstandsverlauf der Probe M3 bei verschiedenen Magnetfeldern. Die Ladungsträgerdichte wurde durch eine Gateelektrode variiert und nimmt von (A) bis (E) schrittweise ab. Für eine schnelle Einschätzung können wiederum Widerstandsverläufe unterhalb der gepunkteten, roten Linie als metallisch, oberhalb als isolierend angenommen werden. Gleiche Farben entsprechen in dieser Abbildung gleichen Magnetfeldwerten.

Die Untersuchung der Proben unter dem Einfluss einer Gateelektrode belegt ebenfalls einen magnetfeld-induzierten MIT³. Repräsentativ für die übrigen Proben sind in [Abbildung 4.18](#) die Ergebnisse der Abkühlkurven für Probe M3 dargestellt. Bei keiner der Proben war es durch Verarmen oder Anreichern von Ladungsträgern möglich, das Ausbleiben des MIT herbeizuführen und damit den Transport über alle Feldstärken hinweg auf die metallische oder isolierende Seite zu verlagern. In

³Die Probe M0 zeigte lediglich geringste Gateabhängigkeiten und ist daher von der folgenden Betrachtung ausgenommen

[Abbildung 4.18](#) zeigen die einzelnen Teilbilder, zwischen maximaler Anreicherung und kompletter Verarmung des QW mit Ladungsträgern, bei hohen Magnetfeldern einen zueinander vergleichbaren Verlauf. Ebenso erkennt man, dass ρ_{xx} bei 40 K von der Ladungsträgerdichte p_s so gut wie unabhängig ist. Unterschiede im Verlauf des Widerstandes entwickeln sich vor allem auf der isolierenden Seite des MIT. Hier zeigt die Probe bei Verarmung eine starke Zunahme der Magnetfeldabhängigkeit.

4.3.2 Diskussion

Ermittlung des kritischen Magnetfeldes B_c

Die genaue Zuordnung der einzelnen Kurven zur metallischen oder isolierenden Phase erfolgt durch Ermittlung des kritischen Magnetfeldes mittels der zwei eingangs beschriebenen Konzepte:

Konzept A: Für die erste Methode wird das Transportverhalten als metallisch definiert, falls die Leitfähigkeit bei $T = 0\text{ K}$ einen Wert $\sigma_{xx} > 0$ annimmt. Dazu wird $\sigma_{xx} = (\rho_{xx})^{-1}$ im Bereich 1,7 K–4,2 K betrachtet und nach $T = 0$ extrapoliert. Die Leitfähigkeit als Funktion des Magnetfeldes und der Temperatur lässt sich in der Nähe des MIT, auf der metallischen Seite, nach Wojtowicz et al. [70] durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\sigma_{xx}(T, B) = \sigma_{xx}(0, T) + A(B) \cdot T^{1/2}. \quad (4.30)$$

Die Leitfähigkeit bei $T = 0\text{ K}$ ermittelt sich dementsprechend durch die Auftragung gegen $T^{1/2}$ und lineare Extrapolation der Messdaten. [Abbildung 4.19](#) belegt für die meisten Messungen den linearen Zusammenhang zwischen $\sigma_{xx}(T, B)$ und $T^{1/2}$. Lediglich der Leitfähigkeitsverlauf der Probe M0 wird ungenügend durch [Gleichung 4.30](#) wiedergegeben. Unter der Voraussetzung, dass sich durch die Gleichung nur Proben in unmittelbarer Nähe zum MIT beschreiben lassen, kann dies als Indiz für die starke Ausprägung der metallischen Phase, abseits des MIT, gewertet werden.

Aus dem Umstand, dass in den Teilbildern der [Abbildung 4.19](#) die Leitfähigkeit $\sigma_{xx}(0, B)$ nahezu linear mit $B - B_c$ ansteigt, können mit der Gleichung

$$\sigma_{xx}(0, B) = \sigma_c \cdot \left(\frac{B}{B_{c1}} - 1 \right)^\nu \quad (4.31)$$

durch Anfitzen der Messkurve die Parameter σ_c , ν und B_{c1} ermittelt werden [70]. Die daraus gewonnenen Daten sind in [Tabelle 4.3](#) zusammengefasst. Neben der Probe M0 weisen darin, nach dieser Auswertungsmethode, auch die Proben M1 und M2 kein kritisches Magnetfeld auf, d. h. selbst ohne anliegendes Magnetfeld gilt $\sigma_{xx} > 0$. Die Messungen im [Abschnitt 4.1](#) deuteten bereits an, dass sich diese Proben durch die ungewöhnlich große Lokalisierungsgröße besonders nahe am MIT befinden. Jedoch wären für verlässlichere Ergebnisse mit dieser Methodik weitere Messungen im mK-Bereich notwendig.

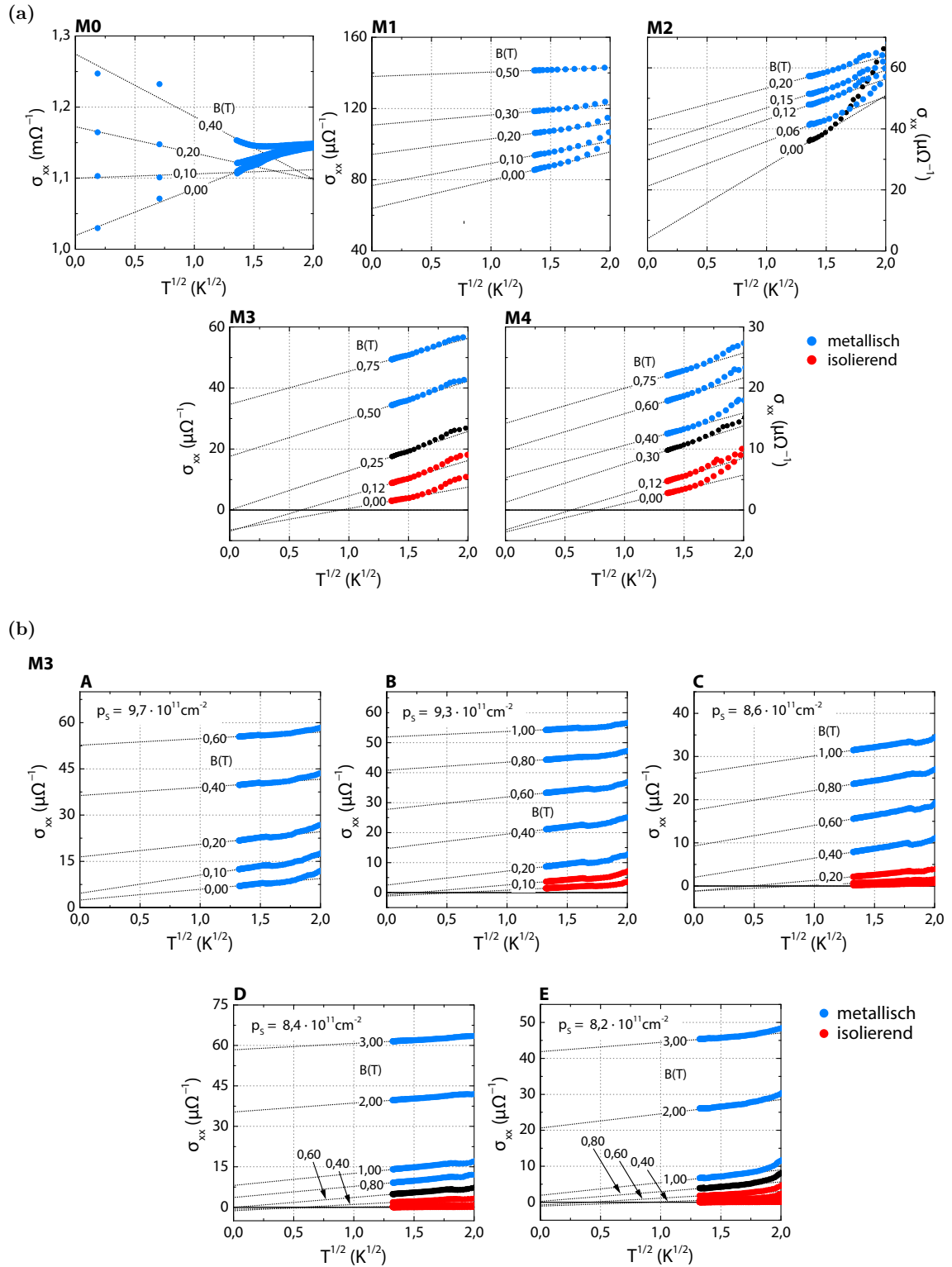


Abbildung 4.19 Leitfähigkeit als Funktion von $T^{1/2}$ bei verschiedenen Magnetfeldern. Berechnet aus den Abbildungen (a) 4.17 und (b) 4.18. Metallisches Verhalten wird durch blaue Messpunkte illustriert, isolierendes durch rote. Schwarz gefärbte Datenpunkte weisen auf eine Messung im Übergangsbereich hin.

Dessen ungeachtet ist die Tatsache, dass sowohl obige Formel als auch das Widerstandsmodell des Hopping-Transports den Kurvenverlauf beschreiben können, ein weiteres Indiz für die unmittelbare Nähe der Proben M1 und M2 zum MIT. Des Weiteren weisen die Proben M3 und M4 bei $B = 0$ eindeutig isolierendes Verhalten auf. Daraus folgt, dass neben einem magnetfeld-induziertem MIT auch ein MIT bei Erhöhung der Mn-Konzentration im QW erfolgt.

Die Auswertung der gateabhängigen Messungen bestätigt die erste Einschätzung, dass trotz vollkommener Verarmung oder Anreicherung des QWs mit Löchern ein MIT stattfindet. Erwartungsgemäß steigt B_{c1} mit zunehmender Verarmung der Ladungsträger an. Das kritische Magnetfeld bei maximaler Anreicherung ist jedoch sehr gering.

Tabelle 4.3 Aus [Abbildung 4.19](#) ermittelte Parameter σ_c , ν , B_{c1} und der aus der Steigung ermittelte Wert B_{c2} für die Proben M1–M4 (oben) und M3 bei unterschiedlichen Gatespannungen (unten).

#	<i>M0</i>	<i>M1</i>	<i>M2</i>	<i>M3</i>	<i>M4</i>
σ_c ($\mu\Omega^{-1}$)	-	-	-	$13,4 \pm 2,1$	$6,2 \pm 0,9$
ν	-	-	-	$1 \pm 0,002$	$1 \pm 0,002$
B_{c1} (T)	Metall	Metall	Metall	$0,22 \pm 0,03$	$0,23 \pm 0,02$
B_{c2} (T)	$< 0,01$	0,57	0,97	5,2	9,5

#	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
σ_c ($\mu\Omega^{-1}$)	$11,3 \pm 1,4$	$10,9 \pm 1,9$	$15,3 \pm 1,6$	$15,3 \pm 0,9$	$15,2 \pm 1,2$
ν	$0,80 \pm 0,03$	$0,97 \pm 0,05$	$0,92 \pm 0,04$	$1 \pm 0,002$	$1 \pm 0,001$
B_{c1} (T)	$0,08 \pm 0,01$	$0,17 \pm 0,02$	$0,36 \pm 0,02$	$0,62 \pm 0,03$	$0,83 \pm 0,04$
B_{c2} (T)	1,9	4,2	6,6	7,2	7,9

Konzept B: Im Rahmen des zweiten Ansatzes, wurde im Temperaturbereich zwischen 1,7 K und 4,2 K die Steigung der Widerstandskennlinien bestimmt, wobei ein Kurvenverlauf mit $d\rho_{xx}/dT > 0$ als metallisch eingestuft wird. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Steigung im unmittelbaren Übergangsbereich linear mit dem Magnetfeld ändert ([Abbildung 4.20](#)), konnte B_{c2} , bei $\rho_{xx}/dT = 0$, durch einen linearen Fit bestimmt werden. Die Ergebnisse der Auswertung sind in ebenfalls [Tabelle 4.3](#) zusammengefasst. Für B_{c2} ergeben sich im Vergleich zu B_{c1} deutlich höhere Werte.

Daneben sind alle Proben bei $B=0$ als isolierend einzustufen. Hierbei genügt bei Probe M0 allerdings ein äußerst geringes Feld zum Überschreiten des MIT. Das kritische Magnetfeld nimmt, analog zur ersten Methode, entweder mit steigender Mn-Konzentration oder steigender Ladungsträgerverdrängung zu. Obgleich sich durch beide Methoden ein exakter Grenzwert ermitteln lässt, erfolgt der MIT kontinuierlich. Daher ist der Übergangsbereich sowohl von metallischen als auch isolierenden Transporteigenschaften geprägt und quantitativ nur schwer zu beschreiben.

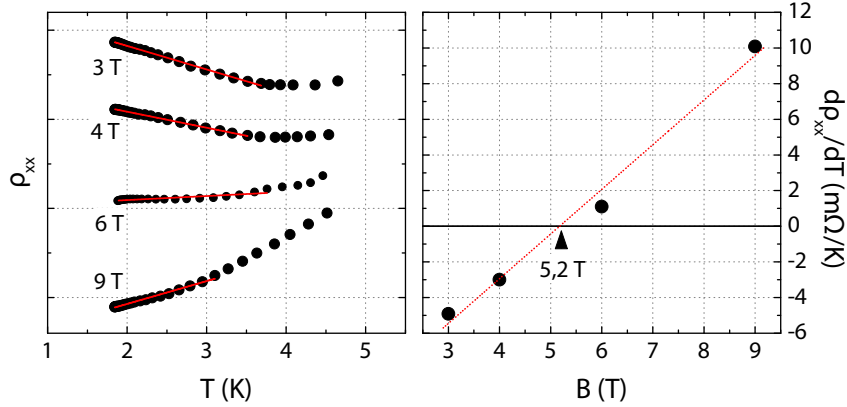


Abbildung 4.20 Ermittlung des Parameters B_{c2} : Temperaturabhängiger Widerstand bei 1,7–4,5 K (zur besseren Übersicht zueinander verschoben abgebildet) und Steigung in diesem Bereich als Funktion des Magnetfeldes. Exemplarisch anhand der Probe M3 dargestellt.

B_{c1} und B_{c2} im Kontext des Ioffe-Regel-Kriteriums

Nach Ioffe und Regel [178] ist kein kohärenter, metallischer Transport mehr möglich, falls die mittlere freie Weglänge kürzer als der interatomare Abstand wird. Dieses sogenannte Ioffe-Regel-Kriterium ist definiert als

$$k_F l \sim 1, \quad (4.32)$$

wobei k_F der Fermi-Wellenvektor und l die mittlere freie Weglänge ist. Das metallische Regime entspricht dem Fall $k_F l \gg 1$. Mit der mittleren freien Weglänge $l = \hbar/e \sqrt{2\pi p_s} \mu$, der Mobilität μ und den Gleichungen 2.6 und 2.27 berechnet sich $k_F l$ im zweidimensionalen Fall zu

$$k_F l = \frac{\hbar}{e^2 \rho_{xx}}. \quad (4.33)$$

Zur Überprüfung der experimentellen Ergebnisse nach dem Ioffe-Regel-Kriterium, sind in [Abbildung 4.21](#) die ermittelten Werte für $k_F l$ als Funktion des Magnetfeldes für beide Datensätze bei einer Temperatur von 1,7 K aufgetragen. Hierbei wird deutlich, dass für die Probe M0 die Bedingung $k_F l \gg 1$ über den gesamten Magnetfeldbereich gut erfüllt ist. Dies ist ein weiterer Beleg für ihr metallisches Verhalten.

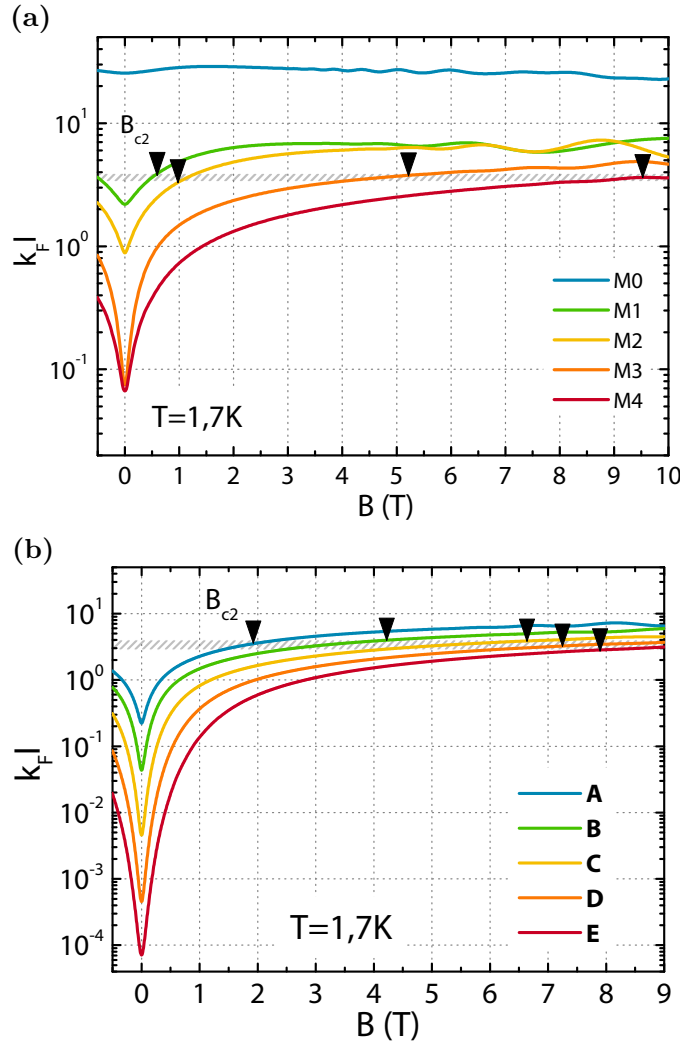


Abbildung 4.21 Produkt aus Fermi-Wellenlänge und mittlerer freier Weglänge als Funktion des Magnetfeldes für die (a) Proben M0–M4 und (b) Probe M3 bei Variation der Ladungsträgerdichte (gleiche Bezeichnung wie in [Abbildung 4.18](#)). Die Pfeile markieren das kritische Magnetfeld B_{c2} (aus [Tabelle 4.3](#)) der jeweiligen Messkurve. Metallisches Verhalten wird für $k_F l \gg 1$ angenommen. Der schraffierte Bereich illustriert den aus den Einzelmessungen ermittelten Grenzbereich des MIT.

Die Proben M1 und M2 befinden sich genau im Grenzbereich um $k_F l \sim 1$. Auch dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass sich diese Proben in unmittelbarer Nähe zum MIT befinden. Für die Proben M3 und M4 wurde als kritisches Magnetfeld ein etwa gleich großer Wert von $B_{c1} \approx 0,23\text{ T}$ ermittelt. In diesem Magnetfeldbereich liegen beide Proben deutlich unter einem Wert von 1. Verarmt man die Proben, wie am Beispiel der Probe M3 in [Abbildung 4.21\(b\)](#) gezeigt, wird $k_F l$ wie erwartet sehr klein. Bei einer stark lokalisierten Probe wie dieser wird selbst bei maximaler Anreicherung ein Wert von $k_F l = 10$ nicht überschritten.

Der folgenden Betrachtung liegt die Idee zugrunde, dass sich in einem Materialsystem, in der sich die Proben lediglich durch die Dotierkonzentration unterscheiden, ein gemeinsamer Grenzwert für $k_F l$ finden lässt, bei dessen Überschreitung das Material in die metallische Phase übergeht. Betrachtet man die kritischen Magnetfelder, ermittelt durch Extrapolation (B_{c1}), ergeben sich für die einzelnen Messungen bzw. Proben unterschiedliche $k_F l$ -Werte. Unter Verwendung der kritischen Magnetfelder, die sich aus der Steigung ergeben (B_{c2}), lässt sich jedoch ein universeller Grenzwert finden. In [Abbildung 4.21](#) sind die Positionen der individuellen kritischen Magnetfelder durch schwarze Pfeile markiert. Aus den Daten ergibt sich $k_F l = 3,63 \pm 0,24$ für [Abbildung 4.21\(a\)](#) bzw. $k_F l = 3,48 \pm 0,47$ für [Abbildung 4.21\(b\)](#). Aus der Analyse aller vorliegenden Daten ergibt sich damit für 1,7 K ein Wert von $k_F l = 3,54 \pm 0,37$. Nach [Gleichung 4.33](#) entspricht das einem kritischen Widerstand ρ_c von

$$\rho_c = 7290 \, \Omega \quad (4.34)$$

bzw. einer kritischen Leitfähigkeit σ_c

$$\sigma_c = \rho_c^{-1} = 1,37 \cdot 10^{-4} \, \Omega^{-1} . \quad (4.35)$$

Universelles Widerstandsmodell

Neben der Ermittlung des kritischen Magnetfeldes untersuchen wir die Möglichkeit, mit einem einheitlichen Widerstandsmodell sämtliche Kennlinien einer Probe, sowohl auf der isolierenden als auch auf der metallischen Seite, zu beschreiben. Ausgehend von den Erkenntnissen im vorangegangenen Abschnitt, betrachten wir die Probe im Bilde der gebunden magnetischen Polaronen. Die Verringerung der BMP-Bindungsenergie im Magnetfeld ist nach [Gleichung 2.72](#) proportional zur Suszeptibilität und lässt sich in einem Paramagneten durch dB_j/dB beschreiben.

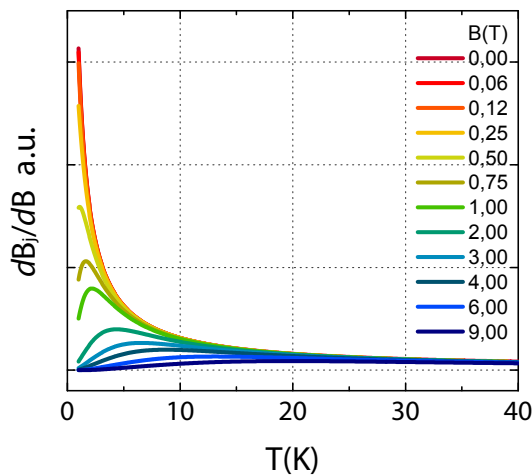


Abbildung 4.22 Theoretischer Verlauf der Suszeptibilität in einem Paramagneten im Temperaturbereich 1,7–40 K bei verschiedenen Magnetfeldern.

Betrachtet man den temperaturabhängigen Verlauf der Funktion dB_j/dB für verschiedene Magnetfelder (Abbildung 4.22), ergibt sich ein zu den experimentellen Daten ähnlicher Verlauf. Insbesondere die nicht-monotone Steigung im mittleren Magnetfeldbereich wird qualitativ gut wiedergegeben. Daher ist dieser Ansatz gegenüber Gleichung 4.25 vorzuziehen. In der allgemeinsten Form lässt sich der Widerstand nach [72] schreiben als:

$$\rho_{xx} = \rho_0(B) \cdot \exp \left[\left(\frac{T_0(B)}{T} \right)^\gamma \right] \quad (4.36)$$

mit $\rho_0(B, T) = \rho_{res} \cdot (1 + a \cdot dB_j/dB)$ und $T_0(B, T) = \alpha_{bmp} \cdot dB_j/dB + \beta$. Hierbei ist ρ_{res} der Restwiderstand bei $T = 0$. Dieser Wert entspricht dem gesättigten negativen Magnetowiderstand bei 1,7 K. Der Parameter α_{bmp} repräsentiert die Polaron-Bindungsenergie. Er kann über die Austauschenergie abgeschätzt werden und ist in der Größenordnung von 0,5 meV [72], was einer Temperatur von 5,8 K entspricht. Für den Exponenten wird den vorhergehenden Resultaten folgend $\gamma = 1/2$ angenommen. Für die Anpassung im Temperaturbereich über 30 K wurde der Widerstand als proportional zu T^2 angenommen. Abbildung 4.23 zeigt die Ergebnisse der Anpassung stabilisierter Daten der Probe M1, stellvertretend für die übrigen Proben. Augenscheinlich wird der Widerstandsverlauf durch Gleichung 4.36 auch im Übergangsbereich gut wiedergegeben.

Tabelle 4.4 Fitparameter nach Gleichung 4.36 ermittelt aus Abkühlkurven der Probe M1. Die Parameter ρ_{res} , β und γ wurden beim Fit festgehalten.

B (T)	0,0	0,2	0,3	0,5	0,75	1,25
ρ_{res} (Ω)	3773					
a	-0,69	-0,69	-0,69	-0,97	-1,5	0,30
α_{bmp} (K)	3,82	2,67	1,79	2,7	8,5	-10,5
β (K)	2,7					
γ	0,5					

Jedoch konnte für höhere Magnetfelder kein erfolgreicher Fit mehr durchgeführt werden. Weiterhin ergaben sich unrealistische Fit-Parameter, bis hin zur negativen Polaron-Bindungsenergie. Während der Restwiderstand ρ_{res} konstant gehalten werden konnte, musste α_{bmp} , wie auch der Parameter a , für einen erfolgreichen Fit als freier Fitparameter fungieren. Physikalisch gesehen sollte die Energieänderung jedoch über dB_j/dB beschrieben werden und α_{bmp} daher konstant sein. Ebenso ist es schwierig, den Parameter β , der eine zusätzliche Aktivierungsenergie im Bilde des

VRH darstellt, richtig abzuschätzen. Der Wert wurde durch den Fit bei $B=0$ ermittelt und für die übrigen Daten fixiert. Eine Verwendung als freier Fitparameter ist nicht möglich, da α_{bmp} und β gegenseitige Abhängigkeiten aufweisen. Die ermittelten Fitparameter sind in [Tabelle 4.4](#) aufgelistet.

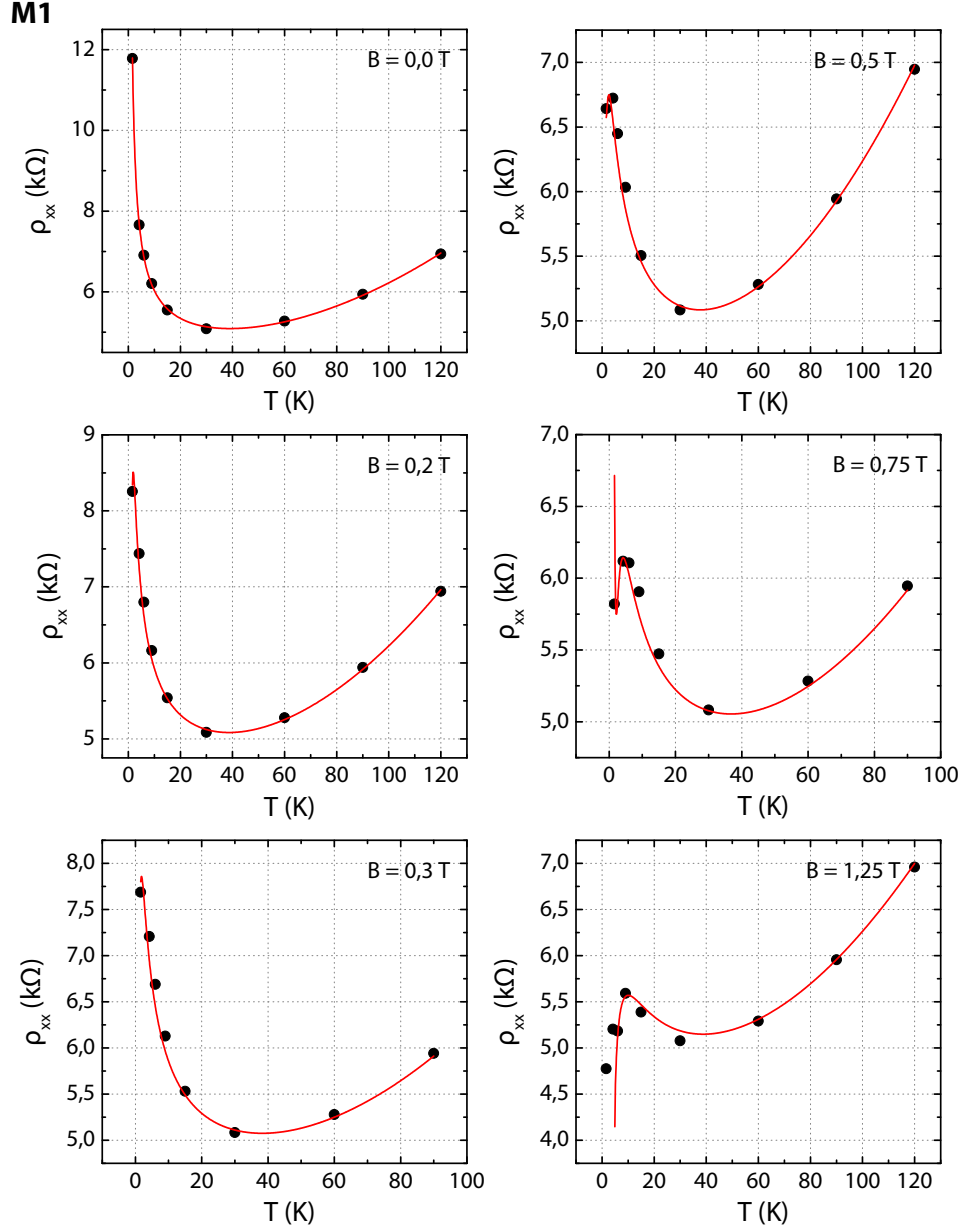


Abbildung 4.23 Fit der stabilisierten Daten der Probe M1 nach [Gleichung 4.36](#) für die Magnetfelder 0–1,25 T. Für den Temperaturbereich über 30 K wurde die Abhängigkeit $\rho_{xx} \propto T^2$ angenommen. Nähere Informationen zu den Fitparametern sind im Fließtext zu finden.

Trotz der Schwierigkeiten, die sich aus der Vielzahl an Parametern ergeben, bestätigen die Ergebnisse eine generelle Abhängigkeit der Messungen von der Suszeptibilität der Probe. Die zufriedenstellende, qualitative Übereinstimmung der Widerstandsver-

läufe kann zusammen mit dem vorliegenden Datenmaterial weitere theoretische Untersuchungen motivieren. Generell bleibt es nach aktuellem Forschungsstand schwierig, in unmittelbarer Nähe zum MIT quantitative Aussagen zuverlässig zu treffen [173, 179].

4.4 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde die starke Lokalisierung, der negative Magnetowiderstand und der sich daraus ergebende magnetfeldgetriebene Metall-Isolator-Übergang in Mn-modulationsdotierten InAs-QW-Strukturen anhand von 5 Proben unterschiedlicher Mn-Konzentration untersucht. Dabei zeigte sich, dass der Lokalisierungsgrad mit steigender Mn-Konzentration zunimmt, wodurch sich unterschiedliche Transportcharakteristika ausbilden. Prinzipiell lassen sich die Proben in 3 Gruppen einteilen:

1. Das Transportverhalten der zwei Proben mit der höchsten Mn-Konzentration (M3 & M4) kann bei tiefen Temperaturen dem Efros-Shklovskii Variable-Range-Hopping zugeordnet werden. Mit steigender Temperatur nimmt die Hopping-Leitung die Form des aktivierten Transports bzw. des Nearest-Neighbour-Hoppings an. Die Proben zeigen einen enorm ausgeprägten negativen Magnetowiderstand, der im Bilde gebundener magnetischer Polaronen beschrieben werden kann. Der Magnetowiderstand ist, wie bei allen Proben, anisotrop bezüglich der Magnetfeldrichtung. Während der starken Widerstandsänderung bei steigendem Magnetfeld erfährt die Probe einen Übergang von isolierendem zu metallischem Verhalten, was durch temperaturabhängige Widerstandskennlinien belegt werden konnte. Der Übergang findet erst bei relativ starken Magnetfeldern ($B > 5 \text{ T}$) statt.
2. Die Proben geringerer Mn-Konzentration (M1 & M2) können bei tiefen Temperaturen ebenfalls durch das Efros-Shklovskii Variable-Range-Hopping beschrieben werden, zeigen jedoch mit steigender Temperatur keinen Übergang zum Nearest-Neighbour-Hopping. Stattdessen weisen sie eine klare T^2 -Abhängigkeit des Widerstandes für $T > 30 \text{ K}$ auf, was auf metallisches Verhalten schließen lässt. Die Proben zeigen einen sehr großen Lokalisierungsradius, was auf die Nähe zum Metall-Isolator-Übergang hinweist. Der negative Magnetowiderstand fällt geringfügig kleiner aus und lässt sich ebenfalls im Bilde der magnetisch gebundenen Polaronen beschreiben. Der magnetfeld-induzierte Metall-Isolator-Übergang findet, angesichts der Nähe dieser Proben zum Metall-Isolator-Übergang, bereits bei geringen Magnetfeldern statt ($B < 1 \text{ T}$).
3. Die Probe M0 unterscheidet sich im Transportverhalten durch eine signifikant geringere Mn-Konzentration deutlich von den übrigen Proben. Die Probe befindet sich auf der metallischen Seite des Metall-Isolator-Übergangs und kann

nicht durch Hopping-Transport charakterisiert werden. Sie zeigt einen wesentlich geringeren NMR, der seinen Ursprung in der Verringerung der Streuung durch die Ausrichtung der Spins im Magnetfeld hat. Die Probe zeigt erwartungsgemäß keinen Metall-Isolator-Übergang.

Daneben wurde die Auswirkung der Ladungsträgeranreicherung bzw. -verdrängung auf die Transportcharakteristika mittels einer Gateelektrode untersucht. Die Ergebnisse belegen einen starken Einfluss auf den Magnetowiderstand und den Metall-Isolator-Übergang und deuten auf die wichtige Rolle des Verhältnisses zwischen Mn-Konzentration und Ladungsträgerdichte (N_0^{qw}/p_s) hin. Darüber hinaus konnte durch die Datenanalyse der kritische Widerstand $\rho_c = 7290 \Omega$ bzw. die kritische Leitfähigkeit $\sigma_c = 1,37 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ ermittelt werden, bei dessen Überschreitung der Metall-Isolator-Übergang stattfindet. Der Wert ist für alle untersuchten Proben universell gültig.

5 Der anomale Hall-Effekt in InAs:Mn

Magnetismus beeinflusst in DMS-Systemen nicht nur die Charakteristika des Längswiderstandes, sondern prägt auch im besonderen Maße den transversalen Widerstand ρ_{yx} . In magnetischen Materialien lässt er sich empirisch, wie in [Abschnitt 2.6](#) beschrieben, durch einen magnetfeldabhängigen und einen zur Magnetisierung proportionalen Anteil beschreiben:

$$\rho_{yx} = R_0 B + R_S M , \quad (5.1)$$

wobei ersteres als klassischer (OHE) und letzteres als anomaler Hall-Effekt (AHE) bekannt ist. Charakterisiert werden die Anteile durch ihre Koeffizienten $R_0(p_s)$ und $R_S(\rho_{xx})$, die von der Ladungsträgerdichte p_s bzw. der Längsleitfähigkeit ρ_{xx} abhängen. Besonderer Zuwendung bedarf hierbei der anomale Hall-Effekt. Obwohl vor beinahe einem Jahrhundert entdeckt und in vielen Materialien untersucht, ist der Effekt noch immer Gegenstand aktueller Forschung. Vergleichsweise wenig ist hierbei über zweidimensionale Systeme und magnetische Halbleiter im Regime der Anderson-Mott-Lokalisierung bekannt, was eine Untersuchung im vorliegenden Materialsystem besonders interessant macht. Proben mit geringer Leitfähigkeit zeigen beispielsweise einen erstaunlich universellen Skalierungszusammenhang zwischen Hall- und Längs-Leitfähigkeit, $\sigma_{xy} \propto \sigma_{xx}^\gamma$ mit $\gamma = 1,6$, der seine Gültigkeit in verschiedenen Materialien über einen großen Leitfähigkeitsbereich hinweg behält.

In diesem Kapitel wird der AHE in InAs:Mn als Funktion der Mn-Konzentration, Temperatur und Gatespannung untersucht. Zunächst werden die Messungen des transversalen Widerstandes ρ_{yx} vorgestellt, die die Grundlage für die nachfolgende Betrachtung bilden. Im Anschluss wird der anomale Anteil ρ_{yx}^{AHE} aus dem Hall-Widerstand extrahiert, mit Blick auf die genannten Einflussfaktoren ausgewertet und zur Analyse der intrinsischen und extrinsischen Mechanismen durch ein Widerstandsmodell angefitet. Zudem werden Erklärungsansätze für den auftretenden Vorzeichenwechsel diskutiert. Zuletzt wird das Skalierungsverhalten des AHE ausgewertet, wobei auch auf das Zusammenspiel mit dem MIT eingegangen wird.

5.1 Der transversale Widerstand

Alle nachfolgenden Messdaten wurden, wie in [Abschnitt A.1](#) erläutert, symmetriert. Das externe Magnetfeld wurde stets senkrecht zum leitenden Kanal angelegt. In [Abbildung 5.1](#) ist der Hall-Widerstand ρ_{yx} der untersuchten Struktur für verschiedene Mn-Konzentrationen bei 1,7 K dargestellt. Die nicht-monotone Steigung der Hall-Kurve ist bei höheren Magnetfeldern annähernd linear und wie für Lochsysteme zu erwarten positiv. Die unterschiedlichen Ladungsträgerdichten der Proben spiegeln sich dabei in der Steigung der einzelnen Hall-Geraden wider. Zudem bilden sich mit steigendem Magnetfeld Quanten-Hall-Plateaus aus. Für schwache Magnetfeldwerte tritt der AHE mit einem dem OHE entgegengesetzten Vorzeichen deutlich in Erscheinung. Der negative Beitrag nimmt dabei mit steigender Mn-Konzentration zu. Da der anomale Hall-Koeffizient R_S nach [Gleichung 2.75](#) proportional zu ρ_{xx} ist, kann diese Zunahme direkt mit der wachsenden Lokalisierung verknüpft werden. Wie im Abschnitt zuvor, bildet auch hier die Probe M0 eine Ausnahme. Sie zeigt einen positiven, d. h. zum OHE gleichgerichteten Beitrag des AHE, der in der späteren Betrachtung noch ersichtlicher wird. Die Magnetfeldabhängigkeit des anomalen Hall-Beitrages wird im Verlauf noch eingehender dargestellt.

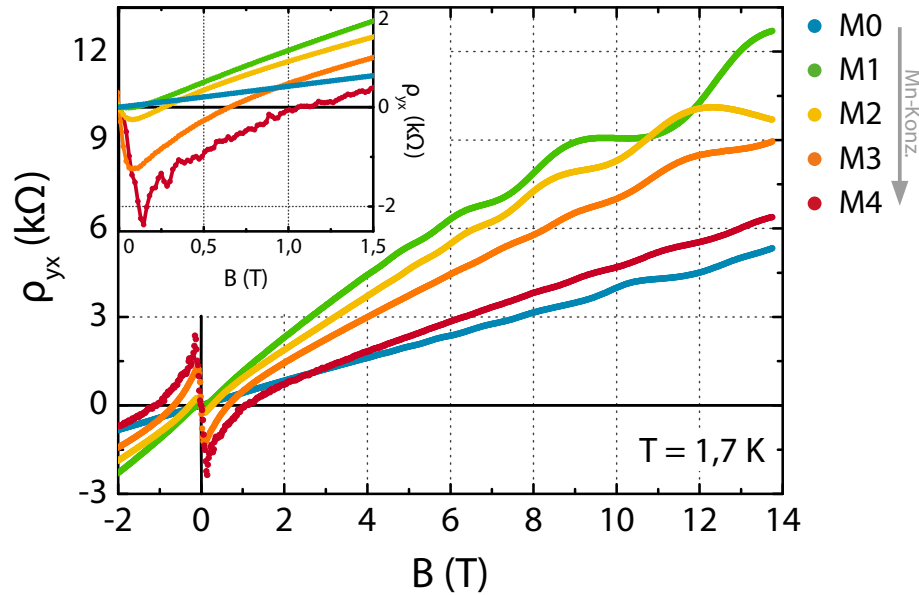


Abbildung 5.1 Hall-Widerstand ρ_{yx} als Funktion des Magnetfeldes bei 1,7 K für die Proben M0–M4. Im Inset ist der Bereich um $B = 0$ vergrößert dargestellt.

Die Temperaturabhängigkeit der Hall-Kurven im Temperaturbereich 1,7–9 K ist repräsentativ für zwei Proben in [Abbildung 5.2](#) gezeigt. Auffallend ist, dass der anomale Hall-Beitrag mit steigender Temperatur im Vergleich zum Beitrag des OHE schwächer wird. Die Senke bei niedrigen Magnetfeldern verrundet zunehmend und verschiebt sich zu höheren Werten.

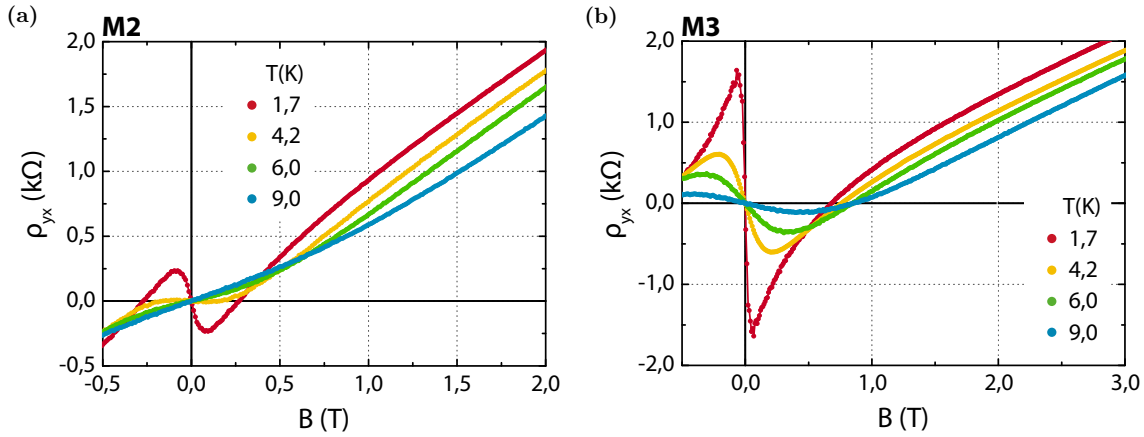


Abbildung 5.2 Hall-Widerstand ρ_{yx} der Proben (a) M2 und (b) M3 als Funktion des Magnetfeldes B bei verschiedenen Temperaturen.

Als weiterer Einflussfaktor wurde in [Abbildung 5.3](#) die Ladungsträgerdichte durch Anlegen einer Gatespannung verändert. Dies wirkt sich auf zwei Arten auf den Hall-Widerstand aus. Zum einen führt die Änderung der Ladungsträgerdichte zu einer veränderten Steigung des linearen OHE. Zum anderen bedingt die Verstärkung der Lokalisierung durch Verdrängung von Ladungsträgern eine enorme Steigerung des anomalen Hall-Beitrags, die vor allem bei niedrigen Magnetfeldern gut zu erkennen ist.

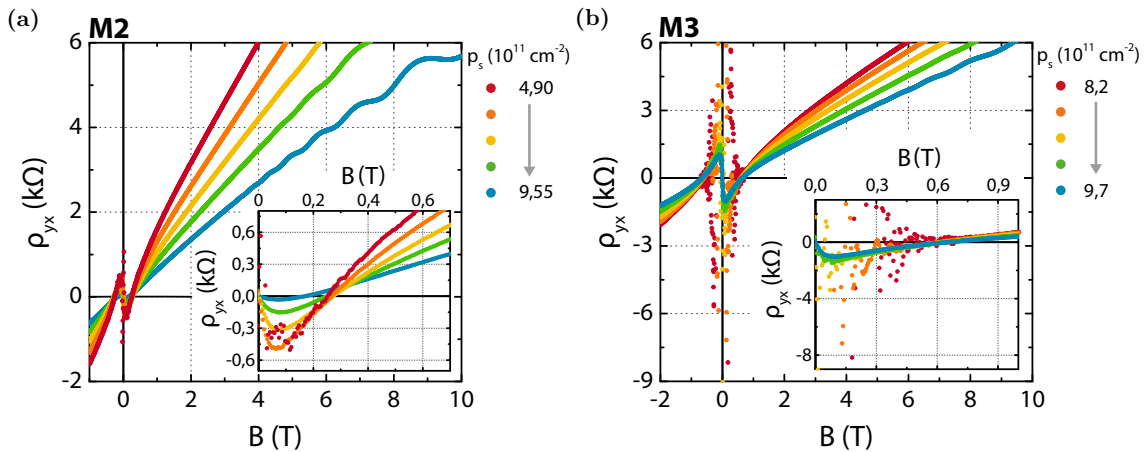


Abbildung 5.3 Hall-Widerstand der Proben (a) M2 und (b) M3 als Funktion des Magnetfeldes bei verschiedenen Ladungsträgerdichten, variiert durch eine Gate-Elektrode. Im Inset ist jeweils der Bereich des Vorzeichenwechsels vergrößert dargestellt.

Die in [Abbildung 5.3\(b\)](#) gezeigten Messwerte für die niedrigsten Ladungsträgerdichten (verarmte Probe) lassen für kleine Magnetfelder keinen nachvollziehbaren

Verlauf mehr erkennen. Aufgrund der merklichen Tendenz ist jedoch davon auszugehen, dass hier ein sehr ausgeprägter negativer AHE auftritt. Die geringe Qualität der Messdaten in diesem Bereich entsteht in den Rohdaten durch die Überlagerung des Hall-Widerstandes mit einem sehr hohen Längswiderstand (siehe [Abschnitt A.1](#)). Dieser Anteil wird zwar durch die Symmetrisierung der Messdaten herausgefiltert, jedoch ist das verbliebene Hall-Signal in einer zur Rauschamplitude ähnlichen Größenordnung.

5.2 Untersuchung des anomalen Hall-Widerstandes

Im Gegensatz zu den vorliegenden Proben wird in ferromagnetischen Systemen der AHE bei höheren Magnetfeldern normalerweise als konstant angenommen. Diese Annahme ist dann gerechtfertigt, wenn der Längswiderstand nur geringfügig magnetfeldabhängig ist und eine Sättigungsmagnetisierung durch geringe externe Felder erreicht werden kann. Der anomale Hall-Widerstand wird in diesem Fall durch lineare Extrapolation des Hochfeld-Bereichs nach $B = 0$ bestimmt. Die Höhe des AHE-Beitrages ergibt sich dann aus dem Schnittpunkt der Regressionsgerade mit der Y-Achse ([Abbildung 2.19](#)). Diese Vorgehensweise wird bei verschiedenen Proben- und Messparametern durchgeführt, sodass auf Basis des entstehenden Datensatzes eine tiefere Analyse der zugrunde liegenden Mechanismen erfolgen kann.

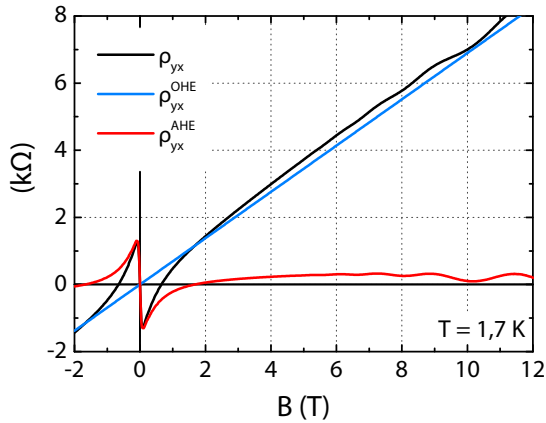


Abbildung 5.4 Separation des Hall-Widerstandes ρ_{yx} (schwarz) in den anomalen (rot) und klassischen (blau) Anteil, illustriert durch die Messdaten der Probe M3.

Allerdings ist diese Vorgehensweise bei den vorliegenden Proben *nicht* möglich. Zum einen ist das verwendete Material paramagnetisch, sodass zur Sättigung der Magnetisierung stärkere Felder nötig sind bzw. für höhere Temperaturen in der Praxis keine Sättigung mehr erreicht werden kann. Zum anderen zeigt ρ_{xx} eine starke Magnetfeldabhängigkeit, selbst bei hohen Magnetfeldern (siehe auch [Abschnitt 4.2](#)). Erschwert wird die Analyse durch das Auftreten des QHE, der bei Proben mit weniger ausgeprägtem NMR bereits bei geringeren Magnetfeldern in Erscheinung tritt. Daher wird für die weitere Untersuchung der anomale Hall-Widerstand durch Subtraktion des klassischen Anteils vom Gesamt-Hall-Widerstand ermittelt: $\rho_{yx}^{AHE} = \rho_{yx} - \rho_{yx}^{OHE}$. Dazu wird die Ladungsträgerdichte durch Auswertung der SdH-Oszillationen bestimmt

und der Hall-Koeffizient über $R_0 = (p_s e)^{-1}$ berechnet. Der sich daraus ergebende magnetfeldabhängige Verlauf der einzelnen Anteile ist zur Veranschaulichung in [Abbildung 5.4](#) illustriert. Hierbei zeigt sich vor allem die diffizile Abhängigkeit des AHE vom angelegten Magnetfeld.

Diese Methodik wurde auf die Messdaten in den Abbildungen [5.1–5.3](#) angewendet. Die sich daraus ergebenden Datensätze sind in den folgenden Abbildungen zusammen mit den dazugehörigen Längswiderständen dargestellt und werden im Kontext der einzelnen Einflussfaktoren untersucht.

Einfluss der Mn-Konzentration

Zunächst wird der Einfluss der Mn-Konzentration betrachtet. Die Proben M1–M4 zeigen in [Abbildung 5.5](#) einen mit der Mn-Konzentration rasch zunehmenden negativen AHE im Bereich schwacher Magnetfelder. Allerdings erfährt ρ_{yx}^{AHE} mit steigendem Magnetfeld bemerkenswerterweise einen Vorzeichenwechsel. Wie das Inset in der Abbildung zeigt, verschiebt sich dabei die Übergangsstelle mit steigender Mn-Konzentration zu höheren Magnetfeldwerten. Obwohl sich hier Parallelen zum magnetfeld-induziertem MIT ergeben ([Abschnitt 4.3](#)), der sich ebenfalls mit der Zunahme der Mn-Konzentration zu höheren Magnetfeldern verschiebt, gibt es keine Korrelation der zwei Übergangsstellen. Die Probe M0 zeigt im Gegensatz zu den übrigen Proben einen positiven Beitrag des AHE, der auch vom Betrag geringer ausfällt. Auf den Vorzeichenwechsel dieser und der übrigen Proben im Bereich des *QHE* wird weiter unten eingegangen.

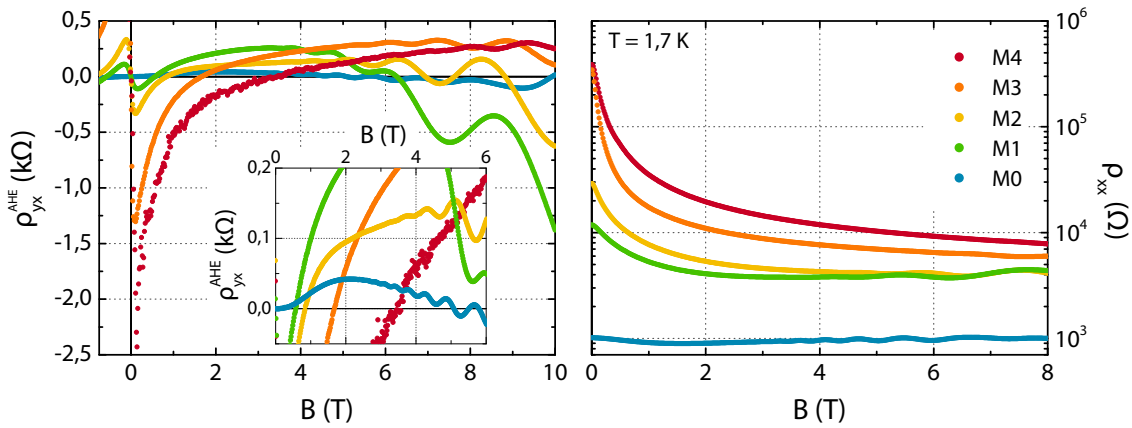


Abbildung 5.5 Anomaler Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} und Längswiderstand ρ_{xx} der Probe M0–M4. Im Inset ist ρ_{yx}^{AHE} im Bereich des Vorzeichenwechsels vergrößert dargestellt. Die Messung wurde bei 1,7 K durchgeführt.

Der Kurvenverlauf der Proben M1–M4 ist vor allem bei geringen Magnetfeldern durch den starken NMR und die Zunahme der Magnetisierung geprägt. Zur Illustration des Zusammenhangs zwischen ρ_{xx} und AHE zeigt [Abbildung 5.6](#) den Verlauf

von ρ_{yx}^{AHE} am Beispiel der Probe M1 für den theoretischen Fall, dass die Magnetisierung – genähert durch die Brillouin-Funktion – bereits bei $B = 0$ gesättigt und konstant ist ($\rho_{yx}^{AHE}/B_J(T, B)$ mit $T=1,7$ K und $J=5/2$). Die anomale Hall-Kurve erhält unter dieser Annahme einen zum Längswiderstand vergleichbaren Verlauf.

Aufgrund des Zusammenhang zwischen ρ_{yx}^{AHE} und ρ_{xx} weisen daher die Proben mit einem ausgeprägten NMR um $B = 0$ einen steilen Verlauf auf, während für höhere Magnetfelder sowohl Längswiderstand als auch anomaler Hall-Widerstand der Proben M1 – M4 untereinander vergleichbare Werte zeigen.

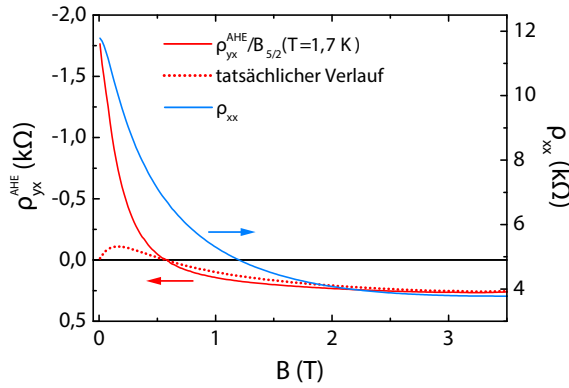


Abbildung 5.6 Theoretischer Verlauf des anomalen Hall-Widerstandes als Funktion des Magnetfeldes unter Annahme einer konstanten Magnetisierung ($B_J = 1$) am Beispiel der Probe M1 bei 1,7 K. Zum Vergleich sind der ursprüngliche Verlauf von ρ_{yx}^{AHE} und der Längswiderstand ρ_{xx} angegeben.

Daneben tritt in [Abbildung 5.5](#) auch der QHE in Erscheinung. Sobald erste Plateaus¹ zu erkennen sind, verändert sich der Verlauf der Kurven und es kann erneut zu einem Vorzeichenwechsel kommen. Dieses Verhalten lässt sich auf die repulsive Wirkung des Mn als Streuzentrum im leitenden Kanal zurückführen, die dazu führt dass die Messkurve im Bereich des QHE gegenüber der klassischen Hall-Gerade eine etwas verringerte Steigung aufweist (siehe Abbildung 3 in [\[180\]](#)). Der Effekt tritt bei geringer Störstellenkonzentration in der Nähe des Quantentrog auf und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht.

Einfluss der Temperatur

Neben der Mn-Konzentration ist auch die Temperatur ein wichtiger Einflussfaktor, da sie sowohl den NMR als auch den Verlauf der Brillouin-Funktion beeinflusst. [Abbildung 5.7](#) zeigt exemplarisch anhand der Probe M2 das temperaturabhängige Verhalten von ρ_{yx}^{AHE} . Entsprechend dem Verlauf des Längswiderstandes zeigt sich bei schwachen Magnetfeldern der größte AHE-Beitrag bei 1,7 K und bei stärkeren Magnetfeldern (z. B. 2 T) der größte AHE-Beitrag bei 9 K. Weiterhin ist zu beobachten, dass sich der Vorzeichenwechsel mit steigender Temperatur zu höheren Magnetfeldern verschiebt. Allerdings ist hierbei zu beachten, dass die Magnetisierung temperaturabhängig ist. Daher wird ρ_{yx}^{AHE} zur besseren Vergleichbarkeit gegen die magnetfeld- und temperaturabhängige Brillouin-Funktion aufgetragen.

¹Nach Abzug des linearen OHE erscheint der QHE als oszillierende Kurve. Die ursprünglichen Plateaus liegen dabei am Wendepunkt.

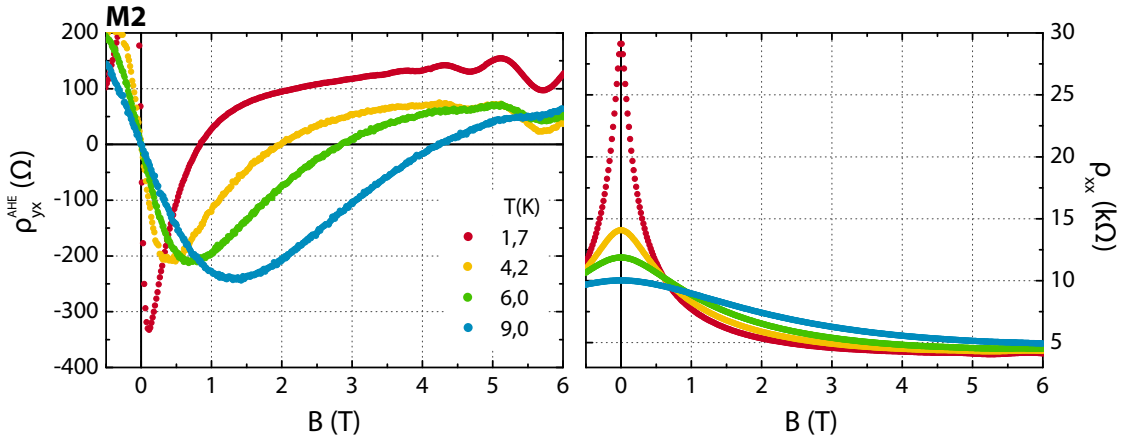


Abbildung 5.7 Anomaler Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} und Längswiderstand ρ_{xx} der Probe M2 bei verschiedenen Temperaturen.

Abbildung 5.8 belegt für die Proben M1–M4, dass der Vorzeichenwechsel im betrachteten Temperaturbereich bei annähernd gleichen (probenspezifischen) Werten der Brillouin-Funktion stattfindet. Damit ist die Übergangsstelle lediglich proben- und *nicht* temperaturabhängig. Dieser Umstand ist besonders bei der späteren Diskussion der Ursachen des Vorzeichenwechsels in Abschnitt 5.3.2 wichtig.

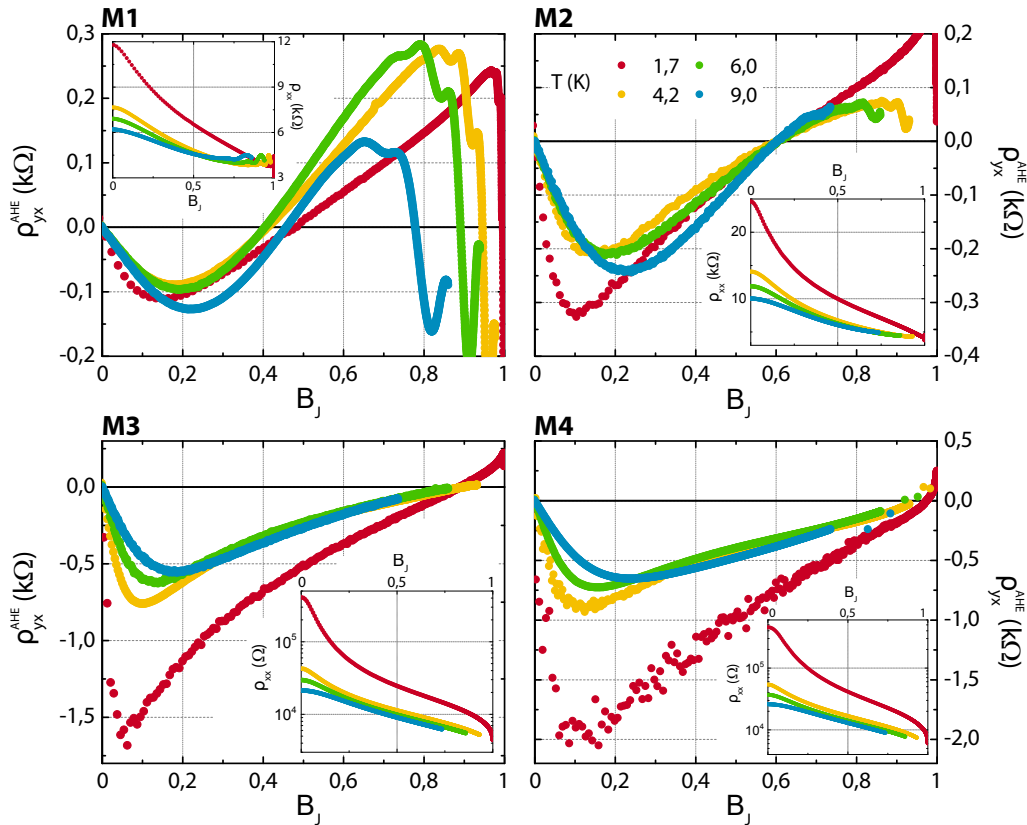


Abbildung 5.8 Anomaler Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} vs. Brillouin-Funktion $B_J(B, T)$ mit $J = 5/2$ für die Proben M1–M4 für verschiedene Temperaturen. Die Insets zeigen den dazugehörigen Verlauf von ρ_{xx} .

Daneben ist in [Abbildung 5.8](#) auch zu erkennen, dass für höhere Temperaturen keine Sättigung der Magnetisierung mehr möglich war, d.h. der Wert $B_J \approx 1$ konnte mit dem maximal experimentell zur Verfügung stehendem Magnetfeld nicht erreicht werden.

Die Temperaturabhängigkeit der Probe M0 mit positiven AHE wird in [Abbildung 5.9](#) untersucht. Für diese Probe wurden Messungen nur im Tieftemperaturbereich 0,035–1,7 K durchgeführt. Dabei änderte sich $\rho_{yx}^{AHE}(B)$ und $\rho_{xx}(B)$ nur geringfügig. Die Brillouin-Funktion ist bei 35 mK bereits bei wenigen 100 mT gesättigt, während bei 1,7 K etwa 3 T benötigt werden. Dieser Umstand macht sich auch im steileren Verlauf der Kurve bei 35 mK bemerkbar.

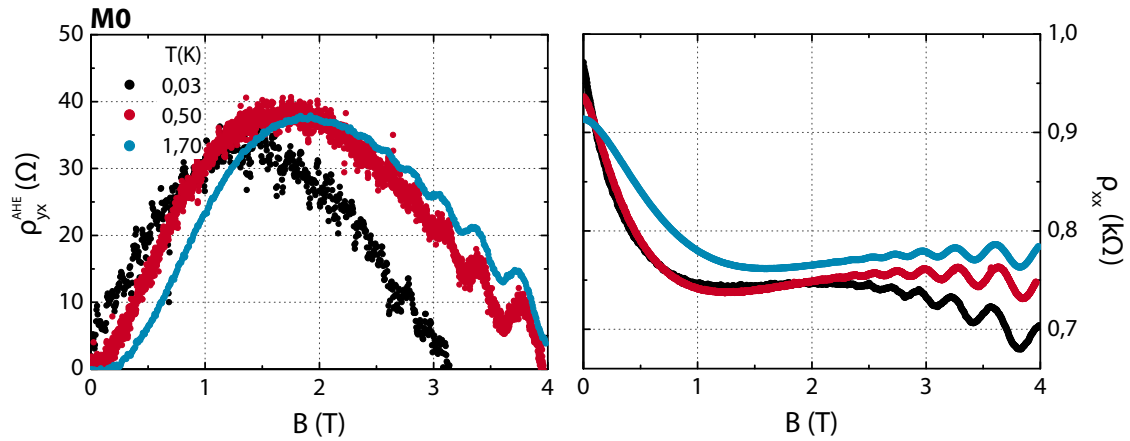


Abbildung 5.9 Anomaler Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} und Längswiderstand ρ_{xx} der Probe M0 bei verschiedenen Temperaturen.

Einfluss der Gatespannung

Die Bedeutung der Lokalisierung für den AHE kann durch gateabhängige Messungen weiter untersucht werden. Im Gegensatz zu einer Erhöhung der Mn-Konzentration ermöglicht diese Vorgehensweise den Längswiderstand durch Anreicherung oder Verdrängung von Ladungsträgern zu variieren, während die Anzahl der Streuzentren im QW konstant bleibt. Damit spielen probenspezifische Einflüsse keine Rolle. Allerdings stört das elektrische Feld einer Gateelektrode die Symmetrie des Einschlusspotentials. Das hat beispielsweise Einfluss auf den Rashba-Term. Diese Auswirkungen sollen allerdings hier vernachlässigt werden.

In [Abbildung 5.10](#) wurde die Gateabhängigkeit des AHE an den Proben M2 und M3 untersucht. Für beide Proben gilt, dass sich der Betrag des AHE bei Verdrängung der Ladungsträger zu höheren Werten verschiebt. Das ist sowohl bei geringen Magnetfeldern auf der negativen Seite des AHE als auch bei hohen Feldern nach dem Vorzeichenwechsel der Fall. Wie die zugrunde liegenden Daten in [Abbildung 5.3\(b\)](#) sind auch die Messkurven der Probe M3 um $B = 0$ im Falle sehr starker Lokalisierung verrauscht. Obwohl dieser Bereich quantitativ nicht verwertbar ist, dürfte ρ_{yx}^{AHE}

die Größenordnung von $10^3 \Omega$ weit übersteigen. Der AHE wechselt das Vorzeichen mit Anstieg der Ladungsträgerdichte bei zunehmend höheren Magnetfeldwerten, wobei insgesamt betrachtet die Übergangsstelle nicht in dem Maße variiert wie bei Erhöhung der Mn-Konzentration in [Abbildung 5.5](#). Auch in diesem Fall korreliert die Übergangsstelle des AHE *nicht* mit der Übergangsstelle des MIT aus dem [Abschnitt 4.3](#).

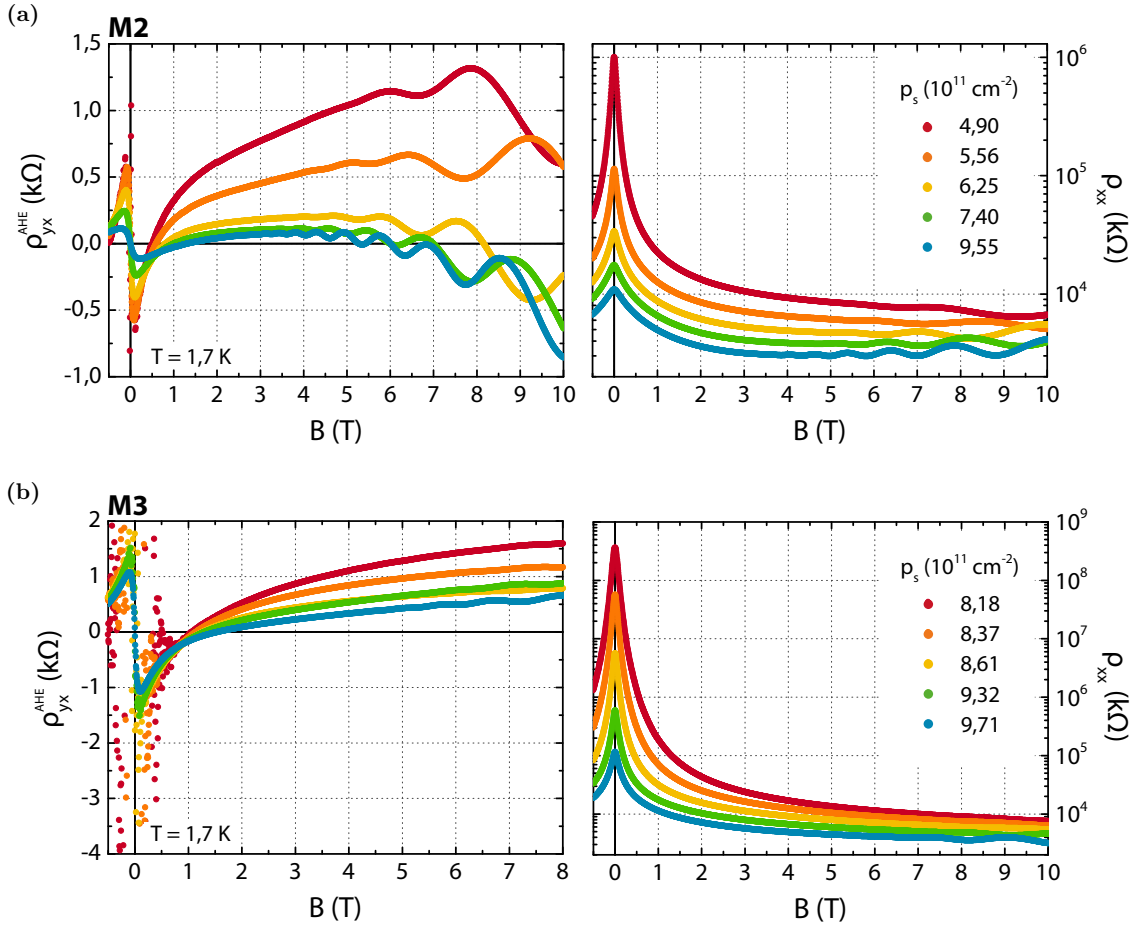


Abbildung 5.10 Anomaler Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} und Längswiderstand ρ_{xx} der Proben (a) M2 und (b) M3 bei verschiedenen Ladungsträgerdichten, variiert durch den Feld-Effekt. Die Probentemperatur liegt jeweils bei 1,7 K.

5.3 Diskussion

5.3.1 Analyse der intrinsischen und extrinsischen Mechanismen durch eine empirische Fitfunktion

Durch Anfitten der Widerstandsverläufe mit einem geeigneten Modell können die Mechanismen, die zum AHE führen näher beleuchtet werden. Allgemein gilt, dass sich der anomale Hall-Koeffizient R_S aus drei Beiträgen zusammensetzt: dem Skew-Scattering-Beitrag ρ_{skew} , dem Side-Jump-Beitrag ρ_{side} und dem Beitrag der intrinsischen Berry-Phase ρ_{berry} . Hierbei zeigt ersterer eine lineare und die übrigen eine quadratische Abhängigkeit vom Längswiderstand ρ_{xx} (siehe [Abschnitt 2.6](#)). Mit den Gleichungen [5.1](#) und [2.75](#) lässt sich demnach der gesamte Hall-Widerstand mit folgender Fitfunktion beschreiben:

$$\rho_{yx} = R_0 B + R_S M = \frac{B}{p_s e} + (a \rho_{xx} + b \rho_{xx}^2) \cdot B_J \left(\frac{g \mu_B J B}{k_B T} \right). \quad (5.2)$$

Dabei sind die Teilbeträge definiert als:

$$\rho_{skew} = (a \rho_{xx}) \cdot B_J \quad (5.3)$$

$$\rho_{berry+side} = (b \rho_{xx}^2) \cdot B_J. \quad (5.4)$$

Die Magnetisierung wird durch die Brillouin-Funktion $B_J(J = 5/2, g = 2)$ genähert², während die Vorfaktoren ($N_0 g \mu_B J = \text{const.}$) in den Fitparametern a und b enthalten sind. Die Ladungsträgerdichte p_s wird in den folgenden Anpassungen ebenfalls als Fitparameter behandelt und kann mit den aus SdH-Oszillationen ermittelten Werten verglichen werden. [Abbildung 5.11](#) zeigt die resultierenden Fits der Proben M1–M4 im Temperaturbereich 1,7–9 K und der Probe M0 im Temperaturbereich 0,035–1,7 K. Zudem sind in [Abbildung 5.12](#) die Fits der gateabhängigen Messungen der Probe M2 zusammengefasst. Eine Zusammenstellung aller Parameterwerte findet sich im [Abschnitt A.3](#) (Tabelle [A.2](#) und [A.1](#)).

Wie in den Abbildungen deutlich zu erkennen ist, ermöglicht [Gleichung 5.2](#) bei den vorliegenden Proben eine sehr gute Beschreibung der meisten Widerstandsverläufe. Erst beim Sichtbarwerden der ersten Quanten-Hall-Plateaus ergeben sich zunehmend Abweichungen, die auf den steigenden Einfluss der repulsiven Streuzentren, wie zuvor bereits beschrieben, zurückzuführen sind [[180](#)]. Dieser Effekt ist beim Fitansatz nicht berücksichtigt. Dementsprechend wird dieser Bereich bei weiteren

²Die Annahme einer modifizierten Brillouin-Funktion nach [Abschnitt A.2](#) führt zu keiner Verbesserung der Fitresultate, weshalb auf eine Anwendung verzichtet wurde.

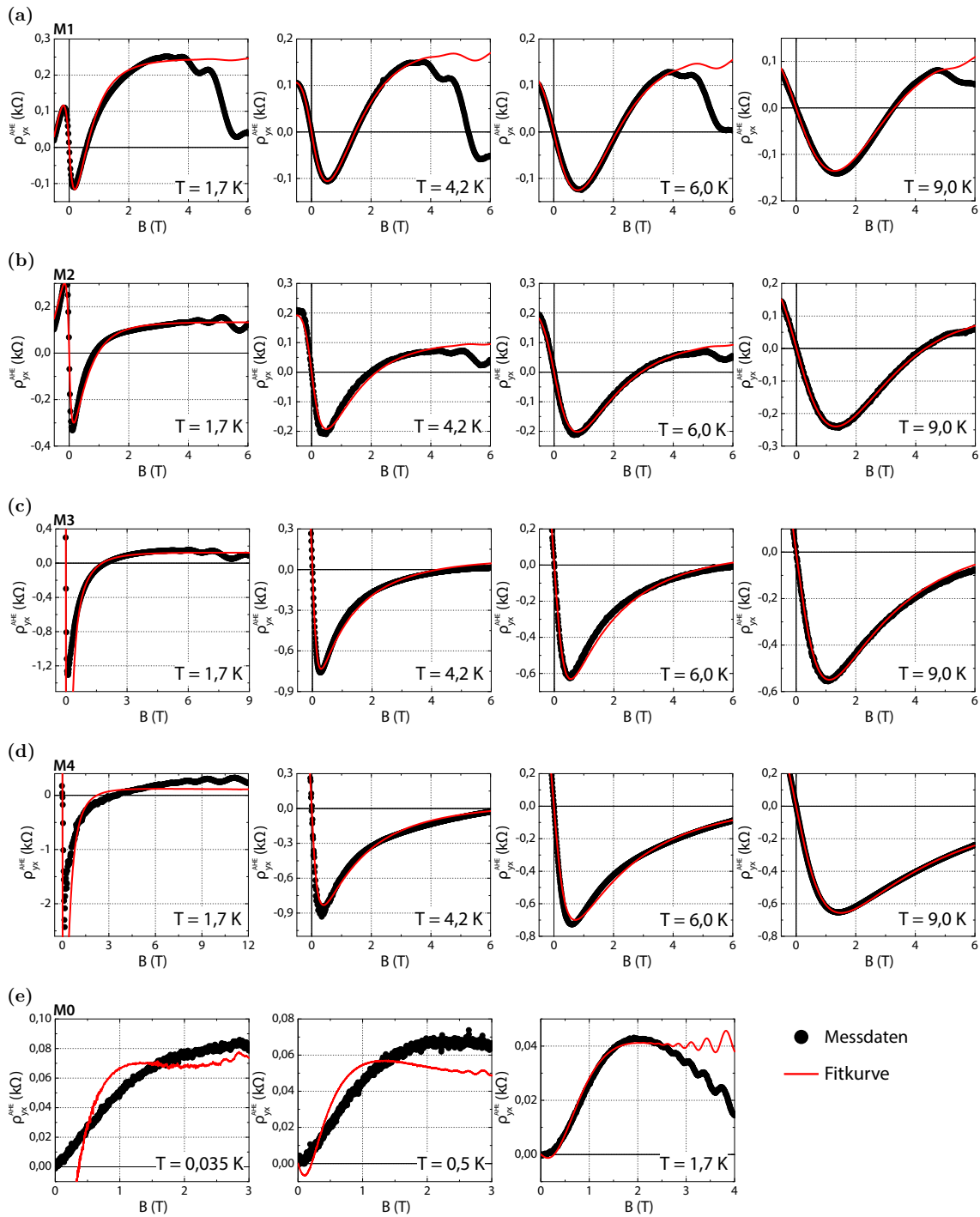


Abbildung 5.11 Anpassung des magnetfeldabhängigen Hall-Widerstandes ρ_{yx} der Proben (a) M1–(d) M4 im Temperaturbereich 1,7–9 K und (e) M0 im Temperaturbereich 0,035–1,7 K nach Gleichung 5.2. Dargestellt ist der anomale Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} als Funktion des Magnetfeldes. Die aus dem Fit ermittelten Ladungsträgerdichten sind in Tabelle 5.1 (oben) zusammengefasst.

Analysen ausgespart. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der Fitansatz üblicherweise bei gut leitenden Metallen Anwendung findet [118, 181, 182]. Da allerdings eine gute Übereinstimmung über einen großen Magnetfeldbereich sowohl in der metallischen als auch in der lokalisierten Phase gegeben ist, wird davon ausgegangen, dass der obige Ansatz auch im Grenzbereich des MIT zum Einsatz kommen kann.

In der Einzelbetrachtung der Kurven ergeben sich für die Probe M0 deutliche Abweichungen über den gesamten Widerstandsverlauf. Allein für 1,7 K war hier ein zufriedenstellender Fit möglich. Der Fit verbessert sich auch durch die Annahme einer lediglich linearen oder quadratischen Abhängigkeit ($b = 0$ oder $a = 0$) nicht. Weiterhin wird der AHE für die Proben M3 und M4 bei 1,7 K im Bereich kleinster Magnetfelder nicht korrekt wiedergegeben. Hier ergibt die Fitfunktion einen wesentlich höheren AHE-Beitrag. Ebenso zeigt die Probe M2 bei kompletter Verarmung der Ladungsträger (Abbildung 5.12 E) eine deutliche Abweichung der Fitkurve, die mit einem sehr großen negativen AHE einhergeht. Offenbar liefert Gleichung 5.2, bezogen auf das vorliegende System, im Bereich „mittlerer“ AHE-Beiträge die besten Ergebnisse. Die aus den Fitkurven ermittelten Lochdichten p_s sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Sie stimmten sehr gut mit den aus SdH-Oszillationen berechneten Werten überein und lassen dadurch die Fitergebnisse weitgehend plausibel erscheinen. Eine größere Abweichung zeigt nur, wie erwartet, die Probe M0.

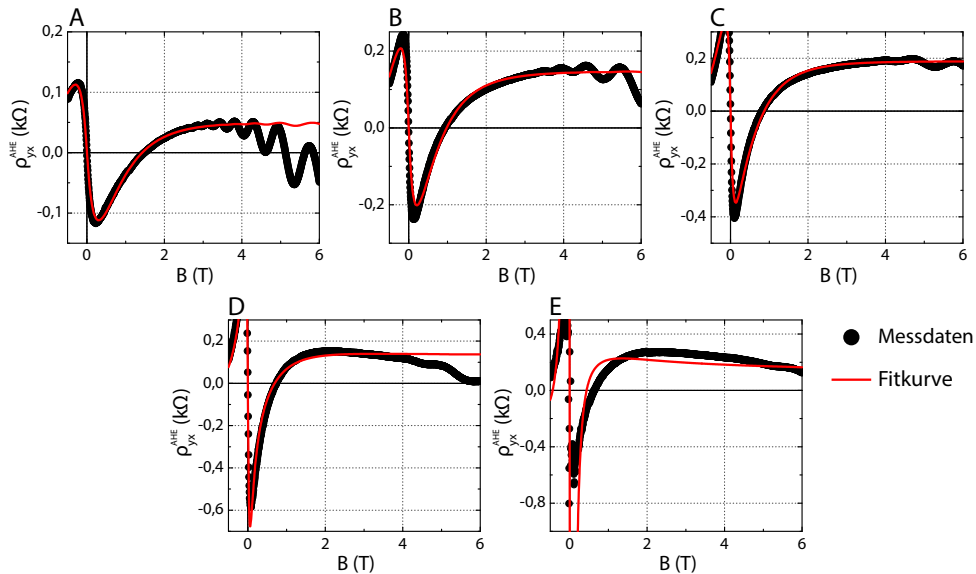


Abbildung 5.12 Anpassung des magnetfeldabhängigen Hall-Widerstandes ρ_{yx} nach Gleichung 5.2 der gateabhängigen Messungen der Probe M2 bei 1,7 K. Dargestellt ist der anomale Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} als Funktion des Magnetfeldes. Hierbei ist bei **A** der QW maximal mit Ladungsträgern angereicht, bei **E** maximal verarmt. Die sich aus dem Fit ermittelten Ladungsträgerdichten sind in Tabelle 5.1 (unten) zusammengefasst.

Aus der Untersuchung der Fitparameter geht hervor, dass der gemeinsame Term des intrinsischen und Side-Jump-Beitrags für alle Messungen stets negativ ist ($b > 0$), während das Skew-Scattering einen positiven Beitrag ($a > 0$) zeigt. Darüber hinaus

Tabelle 5.1 Ladungsträgerdichte p_s der Proben M0–M4 (oben) und der Probe M2 für verschiedene Gatespannungen (unten) bei 1,7 K. Extrahiert aus [Abbildung 5.1](#) und [5.3](#) unter Verwendung der [Gleichung 5.2](#). Zum Vergleich ist die aus den SdH-Oszillationen ermittelte Ladungsträgerdichte angegeben.

#	M0	M1	M2	M3	M4
$p_s (10^{11} \text{ cm}^{-2})$ (Hall)	14,54	5,95	7,05	8,72	13,10
$p_s (10^{11} \text{ cm}^{-2})$ (SdH)	15,72	5,98	6,88	8,73	13,33

#	A	B	C	D	E
$p_s (10^{11} \text{ cm}^{-2})$ (Hall)	9,43	7,50	6,24	5,09	4,32
$p_s (10^{11} \text{ cm}^{-2})$ (SdH)	9,55	7,40	6,25	5,56	4,90

können aus den Fitparametern a und b mittels der Gleichungen [5.3](#) und [5.4](#) die Teilbeiträge der drei Mechanismen berechnet und verglichen werden. Dabei zeigt sich, dass $\rho_{\text{berry+side}}$ bei schwächeren Magnetfeldern dominiert, während ρ_{skew} erst bei höheren überwiegt. Der Vorzeichenwechsel vom gesamten anomalen Hall-Widerstand ρ_{yx}^{AHE} erfolgt dementsprechend bei $\rho_{\text{skew}} = -\rho_{\text{berry+side}}$. In [Abbildung 5.13](#) ist der typische Verlauf der zwei Anteile am Beispiel der Probe M1 bei 1,7 K illustriert, wobei für die weitere Behandlung nach [Gleichung 2.76](#) die Leitfähigkeit aufgetragen ist. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass theoretische Betrachtungen in aller Regel den AHE im Bilde einer Leitfähigkeit σ_{xy} behandeln. Durch eine Umrechnung ist daher eine bessere Vergleichbarkeit gewährleistet.

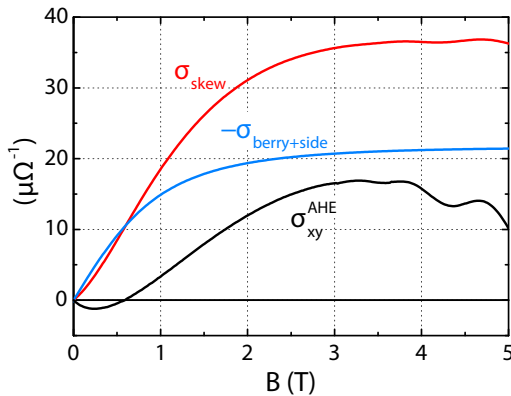


Abbildung 5.13 Typischer Verlauf von σ_{skew} (rot) und $-\sigma_{\text{berry+side}}$ (blau), berechnet aus den Fitparametern a und b . Dargestellt ist die Probe M1 bei 1,7 K. Die Summe der Teilbeiträge ergibt die anomale Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} (schwarz).

Zur Untersuchung der Fragestellung, wie sich die aus den Fits gewonnenen Teilbeiträge durch die drei Einflussfaktoren Mn-Konzentration, Temperatur und Gate-Spannung verändern, wurden aus den Fitkurven die bei hohen Magnetfeldern gesät-

tigten Werte von σ_{skew} und $\sigma_{berry+side}$ ausgelesen. Dabei wurde der Quanten-Hall-Bereich nach Möglichkeit ausgespart. Beispielsweise wurden die Werte der Probe M1 in [Abbildung 5.13](#) bei $B \approx 3,25 T$ ausgelesen – die Teilbeiträge sind hier annähernd gesättigt, während der QHE gerade erst an Einfluss gewinnt. Zusätzlich wurde bei temperaturabhängigen Messungen darauf geachtet, nur Messpunkte miteinander zu vergleichen, die den gleichen Magnetisierungsgrad aufweisen (gleiche B_J -Werte). Aufgrund der schlechten Fitresultate wurde auf die Auswertung der Probe M0 allerdings verzichtet.

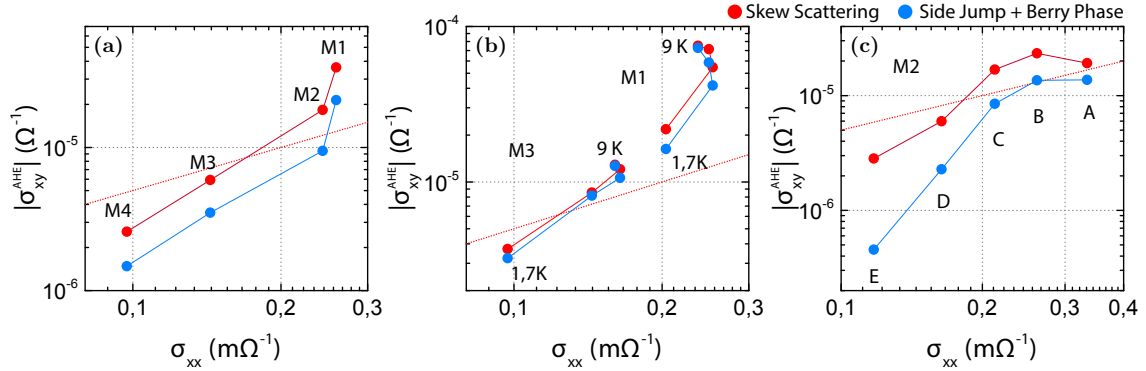


Abbildung 5.14 σ_{skew} (rot) und $-\sigma_{berry+side}$ (blau) als Funktion der Leitfähigkeit σ_{xx} (a) für die Proben M1–M4 bei 1,7 K, (b) für die Probe M1 und M3 für 1,7–9 K und (c) für die Probe M2 bei 1,7 K und verschiedenen Gatespannungen zwischen größtmöglicher Anreicherung **A** und maximaler Verarmung **E** der Ladungsträger im QW. Die gepunktete Linie illustriert das erwartete Skalierungsverhalten für den Skew-Scattering-Mechanismus ($\sigma_{skew} \sim \sigma_{xx}$).

In [Abbildung 5.14](#) sind die ermittelten Absolutwerte geordnet nach den Proben- und Messparametern (a) Mn-Konzentration, (b) Temperatur und (c) Gatespannung als Funktion der Längsleitfähigkeit σ_{xx} dargestellt. Hierbei sei nochmals erwähnt, dass $\sigma_{berry+side}$ stets negativ ist. Für alle Einflussfaktoren gilt, dass sowohl σ_{skew} als auch $|\sigma_{berry+side}|$ mit zunehmender Leitfähigkeit der Probe schneller als linear ansteigen. Wie bereits erläutert, erwartet man allerdings einen linearen Zusammenhang zwischen σ_{skew} und σ_{xx} und ein von σ_{xx} annähernd unabhängiges Verhalten von $\sigma_{berry+side}$ (siehe [Abschnitt 2.6.1](#)). Dem entgegen ändern sich die anomalen Teilbeiträge über einen relativ kleinen Leitfähigkeitsbereich der Probe sehr stark, meist über den Bereich einer Dekade.

Intrinsischer und Side-Jump-Mechanismus

Zunächst wird der gemeinsame Beitrag der Berry-Phase und des Side-Jump-Mechanismus genauer betrachtet und in den Kontext aktueller theoretischer Ergebnisse gesetzt. Bei Erhöhung der Mn-Konzentration ([Abbildung 5.14\(a\)](#)) bzw. Verdrängung von Ladungsträgern ([Abbildung 5.14\(c\)](#)) im leitenden Kanal, sinkt die Leitfähigkeit $|\sigma_{berry+side}|$ sehr stark. Umgekehrt steigt der Beitrag deutlich bei einer Temperaturerhöhung an ([Abbildung 5.14\(b\)](#)). Damit zeigt sich $\sigma_{berry+side}$ sowohl von der Störstellendichte, als auch von der Temperatur abhängig.

Für den Berry-Phasen-Mechanismus wird allgemein angenommen, dass er von Störstellenstreuung unabhängig ist [87, 118]. Ebenso wurde in dünnen Eisenschichten experimentell beobachtet, dass der intrinsische Beitrag unabhängig von der Temperatur und Schichtdicke ist. Nach Shitade und Nagaosa [119] ist der intrinsische Beitrag robust gegenüber inelastischer Streuung durch Elektron-Phonon-Wechselwirkung, zeigt allerdings im resonanten Zustand eine Temperaturabhängigkeit. Diese Temperaturabhängigkeit wurde auch experimentell in Ni festgestellt [183].

Onoda et al. [100] haben in umfangreichen Rechnungen den intrinsischen Mechanismus in einem zweidimensionalen ferromagnetischen Rashba-Modell untersucht und dabei die Beitragsgröße ermittelt. Bei resonanter Verstärkung nimmt σ_{berry} im (reinen) Grenzfall $\hbar/\tau \rightarrow 0$ den maximalen Wert von etwa $e^2/2h \approx 1,9 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1}$ an [113]. Mit sinkender Streuzeit τ fällt der Wert auf etwa $0,05 \cdot e^2/h \approx 1,9 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$ ab. Für den nichtresonanten Fall liegt σ_{berry} , streuzeitunabhängig, ebenfalls bei diesem Wert. Dabei weist der intrinsische Mechanismus bei repulsiven Störstellen einen zum Skew-Scattering entgegengesetztes Vorzeichen auf. Verglichen mit den Fitresultaten bei 1,7 K befinden sich die Probe M1 (Abbildung 5.14(a)) bzw. die Probe M2 bei maximaler Anreicherung (Abbildung 5.14(c), Messpunkt A) im Bereich der oberen Grenze des intrinsischen Beitrages ($e^2/2h$). Bei höheren Temperaturen nehmen die Proben ebenso diesen oder sogar höhere Werte an (Abbildung 5.14(b)). Der Wert $0,05 \cdot e^2/h \approx 1,9 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1}$ wird lediglich bei einer komplett verarmten Probe unterschritten (Abbildung 5.14(c), Messpunkt E). Die Berechnungen von Onoda et al. erfolgten allerdings ohne die Berücksichtigung von Lokalisierungseffekten. Die Anwendbarkeit auf das vorliegende System bleibt demnach offen.

Der extrinsische Side-Jump-Mechanismus ist nach allgemeiner Auffassung unabhängig von der Stärke und Dichte der Streuzentren [24, 184], wodurch eine Änderung der Längsleitfähigkeit ebenfalls keinen Einfluss haben sollte. Yang et al. [184] zeigten allerdings, dass der Side-Jump-Beitrag von der Spin-Struktur der Streuzentren abhängt. Dadurch kann sich die Beitragshöhe ändern, falls ein Systemparameter, wie etwa die Temperatur, variiert wird. Weiterhin gilt nach dem Skalierungsansatz von Tian et al. [118]: $\sigma_{\text{side}} = \beta \sigma_0^{-1} \sigma_{xx}$, wobei β ein Fitparameter und σ_0 die Restleitfähigkeit bei tiefen Temperaturen ist. Obwohl sich $\sigma_{\text{berry}+\text{side}}$ abhängig von σ_{xx} zeigt, konnte dieser Zusammenhang nicht belegt werden. Allerdings wird in diesem Skalierungsansatz auch nicht der Einfluss der Lokalisierung berücksichtigt. Onoda et al. [100] betrachteten bei ihren Rechnungen ebenfalls den Side-Jump-Beitrag und schätzten ihn mit $\sigma_{\text{side}} \sim 10^{-7} \Omega^{-1}$ ab. In dieser Größenordnung hätte es lediglich einen sehr geringen Anteil an $\sigma_{\text{berry}+\text{side}}$.

Skew-Scattering-Mechanismus

Bei der Betrachtung des positiven Skew-Scattering-Beitrags zeigt sich, dass σ_{skew} stets größer als $\sigma_{\text{berry}+\text{side}}$ ist. Dies ist nicht verwunderlich, da der Gesamtwiderstand des AHE im gesättigten Bereich bei allen Messungen ebenfalls positiv ist. Dennoch sind σ_{skew} und $\sigma_{\text{berry}+\text{side}}$ in einer vergleichbaren Größenordnung. Dies geht auch mit

der aktuellen theoretischen Anschauung konform. Während das Skew-Scattering für den super-reinen Grenzfall den dominierenden Mechanismus darstellt und deutlich größere Werte als e^2/h annehmen kann [113], fällt der Beitrag mit steigender Störstellendichte schnell ab und nimmt vergleichbare oder sogar kleinere Werte als der intrinsische Mechanismus an [100]. Dennoch wird für den intrinsischen Bereich, ab etwa $\sigma_{xx} \sim 10^4 \Omega^{-1}$, ein dominierender Beitrag der Berry-Phase angenommen, der so nicht eindeutig gegeben ist [24, 87, 100]. Weiterhin wird für das Skew-Scattering angenommen, dass es rasch mit steigender Temperatur unterdrückt wird [24]. In [Abbildung 5.14\(b\)](#) hingegen steigt der Beitrag bei geringer Temperaturerhöhung enorm an. Allerdings ist für das vorliegende Materialsystem vorstellbar, dass der Rückgang der Lokalisierung die wichtigere Rolle gegenüber der Zunahme der Phononenstreuung spielt.

Fazit

Generell ist die Einschätzung der Fitergebnisse schwierig. In einigen Punkten stimmen die Resultate nicht mit gängigen Anschauungen zu den einzelnen Mechanismen überein. Vor allem fehlt es an einer theoretischen Basis für das vorliegende zweidimensionale System im Regime der starken Lokalisierung an der Grenze zum MIT. Vielmehr beziehen sich viele Betrachtungen auf metallische Proben mit moderater Unordnung. Überdies behalten die Ergebnisse in [Abbildung 5.14](#) ihre Gültigkeit nur unter der Annahme, dass der Fitansatz in [Gleichung 5.2](#) korrekt ist. Der sehr ähnliche Verlauf der beiden Teilbeiträge kann auf gegenseitige Abhängigkeiten der zwei Fitparameter a und b hindeuten, was die Aussagekraft der Parameterwerte einschränkt. Die weiteren Analysen außerhalb des [Abschnitt 5.3.1](#) erfolgen ohne Beachtung der Fitresultate oder der darauf basierenden Schlussfolgerungen.

5.3.2 Der Vorzeichenwechsel der anomalen Hall-Leitfähigkeit als Funktion der Spinpolarisation

Im vorherigen Abschnitt wurde der Vorzeichenwechsel des anomalen Beitrages auf das entgegengesetzte Vorzeichen der Teilbeiträge σ_{skew} und $\sigma_{berry+side}$ und ihren unterschiedlichen magnetfeldabhängigen Verlauf zurückgeführt ([Abbildung 5.13](#)). Im Unterschied dazu zeigen einige theoretische Berechnungen einen Vorzeichenwechsel des AHE, der durch die zunehmende Spinpolarisation der magnetischen Momente hervorgerufen wird. So untersuchten Nunner et al. [185] den anomalen Hall-Effekt in einem zweidimensionalen Elektronengas mit Rashba-Spin-Bahn-Kopplung unter dem Einfluss magnetischer Störstellen. Ihre Berechnungen ergaben einen Vorzeichenwechsel der anomalen Hall-Leitfähigkeit bei zunehmender Störstellenpolarisation $\langle S \rangle$ ([Abbildung 5.15](#)). Die Autoren wählten dabei den Grad der Unordnung so, dass der Skew-Scattering-Beitrag vernachlässigbar klein war. Bei ihren Berechnungen war der Verlauf von σ_{xy}^{AHE} generell auch vom Vorzeichen der Austauschwechselwirkung J_{pd} abhängig. Konkret bedeutet dies bei einer negativen Austauschenergie, wie bei

InAs:Mn, zunächst einen negativen Beitrag des AHE, der mit steigender Störstellenpolarisation positiv wird. Dieses Verhalten stimmt qualitativ mit den vorliegenden Proben überein.

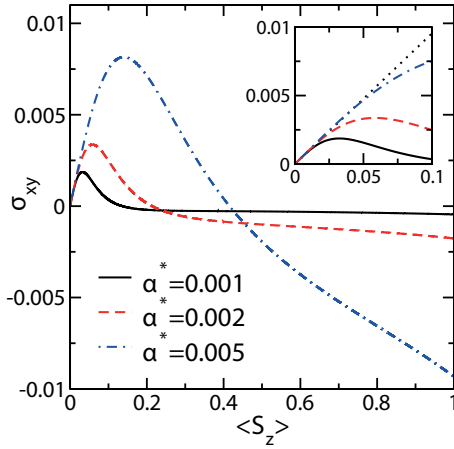


Abbildung 5.15 Anomale Hall-Leitfähigkeit als Funktion der Störstellen-Spin-Polarisation $\langle S_z \rangle$ mit $S = 1$ und positiver Austauschwechselwirkung, berechnet für ein 2DEG mit magnetischen Störstellen bei drei Stärken der Spin-Bahn-Wechselwirkung α^* (aus [185]).

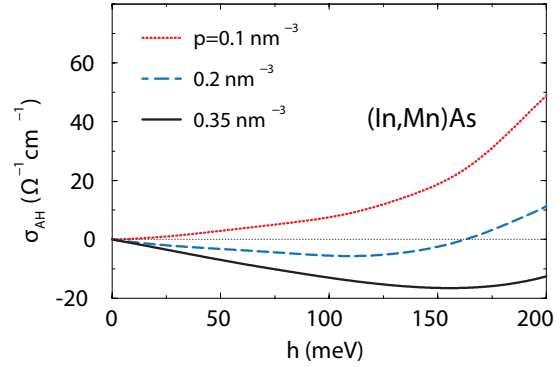


Abbildung 5.16 Numerische Simulation der intrinsischen anomalen Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} als Funktion des Austausch-Feldes $h = xN_0J_{pd}\langle S \rangle$ für verschiedene Ladungsträgerdichten p in ferromagnetischem (In,Mn)As. Berechnet von Jungwirth et al. [88].

Ebenso erhielten Jungwirth et al. [88] bei der numerischen Simulation von σ_{xy}^{AHE} für „Bulk“- (In,Mn)As einen Vorzeichenwechsel als Funktion des Austausch-Feldes h , welches mit der Spinaufspaltung Δ der p-d-Austauschwechselwirkung gleichzusetzen ist (Abbildung 5.16). Hierbei zeigte sich der Vorzeichenwechsel für eine mittlere Ladungsträgerdichte von $p_s = 0,2 \text{ nm}^{-3}$. Bei Annahme einer höheren oder niedrigeren Ladungsträgerdichte ergab sich nur ein negativer bzw. positiver Beitrag. Weiterhin folgern die Autoren, dass σ_{xy}^{AHE} vornehmlich auf den Beitrag der Berry-Phase zurückzuführen ist.

Die genaue Beschreibung der Bandstruktur von (Ga,As)Mn mittels unterschiedlicher $k \cdot p$ und Tight-Binding-Modelle durch Werpachowska et al. [186] zeigte unter Berücksichtigung der Dresselhaus-Spin-Bahn-Kopplung einen starken Einfluss der „Bulk Inversion Asymmetrie“ auf die Berry-Krümmung und die anomale Hall-Leitfähigkeit. Bei letzterer trat vor allem bei kompressiv verspannten Proben ebenfalls ein Vorzeichenwechsel als Funktion der Spinaufspaltung Δ auf, wobei auch hier der Verlauf durch die Ladungsträgerdichte beeinflusst wurde (Abbildung 5.17). Je höher die Ladungsträgerdichte, desto größer ist der Bereich der Spinaufspaltung, in dem das negative Vorzeichen bestehen bleibt. Dieses Verhalten führten die Autoren auf den Einfluss des Dresselhaus-Effektes zurück [186]. Bei einer genügend hohen Spinaufspaltung geht das negative Vorzeichen allerdings verloren.

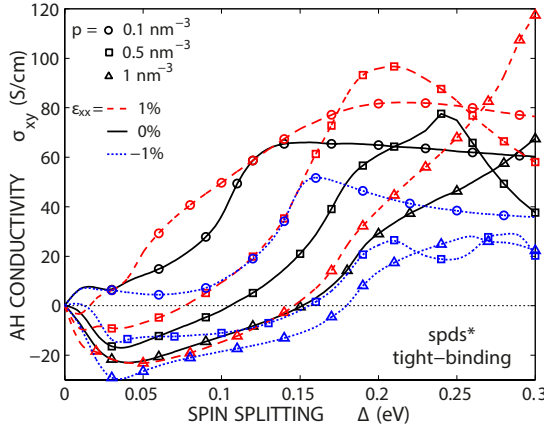


Abbildung 5.17 Intrinsische anomale Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} als Funktion der Spinaufspaltung Δ für verschiedene Lochdichten p_s und biaxiale Verspannungen ϵ_{xx} im Tight-Binding-Modell unter Berücksichtigung der Bulk-Inversion-Asymmetrie. Berechnet für (Ga,Mn)As von Werpachowska et al. [186].

Für einen qualitativen Vergleich der Messdaten mit [Abbildung 5.16](#) bzw. [5.17](#) kann unter Zuhilfenahme der Gleichung

$$\Delta = N_0 \langle S \rangle J_{pd} \quad \text{mit } \langle S \rangle = S \cdot B_J \quad (5.5)$$

die anomale Hall-Leitfähigkeit als Funktion der Spinaufspaltung dargestellt werden. Hierbei wird wie zuvor N_0 für alle Proben mit $< 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ abgeschätzt. Einen verlässlichen Anhaltspunkt für die Analyse bieten dabei vor allem die gateabhängigen Messungen, da N_0 innerhalb der einzelnen Messungen konstant ist und damit der genaue Wert für eine qualitative Untersuchung irrelevant ist.

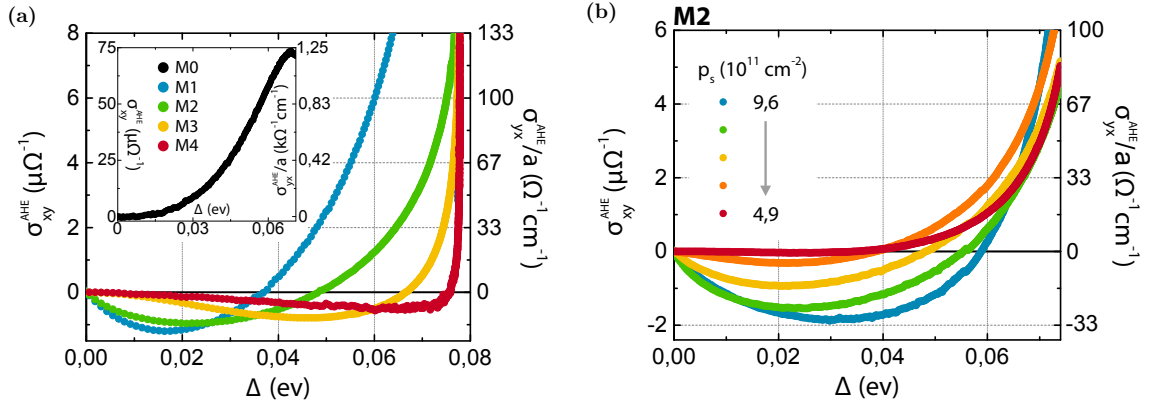


Abbildung 5.18 Anomale Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} als Funktion der Spinaufspaltung Δ für (a) die Proben M0–M4 und (b) die Probe M2 bei Variation der Ladungsträgerdichte mittels Feldeffekt. Spinaufspaltung berechnet nach [Gleichung 5.5](#). Die Skalierung auf der rechten Seite veranschaulicht die rechnerische dreidimensionale Leitfähigkeit (σ_{xy}^{AHE}/a) bei einer Gitterkonstante $a \approx 6 \text{ \AA}$.

Die resultierende Darstellung in [Abbildung 5.18](#) zeigt einen zu den theoretischen Simulationen vergleichbaren Verlauf. Analog zur Veröffentlichung von Werpachowska et al. [186] wird die Übergangsstelle in erster Linie durch die Ladungsträgerdichte

p_s geprägt. Das wird aus der Tatsache abgeleitet, dass sich der Übergangspunkt stets mit steigender Ladungsträgerdichte zu höheren Werten von Δ verschiebt, unabhängig davon, ob die Ladungsträgerdichte mittels Mn-Dotierung (Abbildung 5.18(a)) oder Gateelektrode (Abbildung 5.18(b)) erhöht wurde. Ferner hat die Auswertung in Abbildung 5.8 gezeigt, dass die Übergangsstelle temperaturunabhängig ist. Dabei kann, zumindest im betrachteten Temperaturbereich, p_s als konstant angesehen werden. Interessant ist zudem auch, dass die Probe M0 (Inset in Abbildung 5.18(a)) mit der höchsten Ladungsträgerdichte und einer vergleichsweise guten Leitfähigkeit keinen Vorzeichenwechsel zeigt.

Für einen quantitativen Vergleich der Beitragsgrößen wurde neben der tatsächlichen anomalen Hall-Leitfähigkeit der zweidimensionalen Schicht auch der rechnerische Wert für „Bulk“-Material unter Berücksichtigung der Gitterkonstante $a = 6 \text{ \AA}$ berechnet (rechte Achse in Abbildung 5.18). Dabei bewegt sich σ_{xy}^{AHE} in der gleichen Größenordnung wie die Berechnungen von Werpachowska et al [186]. Das deutet darauf hin, dass der intrinsische Beitrag der Berry-Phase auch in InAs:Mn dominiert. Modellrechnungen der Bandstruktur von InAs:Mn-Quantentrögen, ähnlich zu [186], würden hier einen tieferen Einblick erlauben. Eine ausführlichere Einordnung der Leitfähigkeitswerte erfolgt im nächsten Abschnitt.

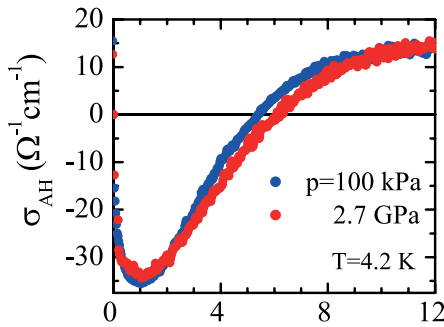


Abbildung 5.19 Anomale Hall-Leitfähigkeit von (In,Mn)Sb als Funktion des Magnetfeldes bei 4,2 K bei verschiedenen Drücken (aus [187]).

Neben den theoretischen Berechnungen findet sich in dem verdünnt-magnetischen Halbleiter (In,Mn)Sb auch ein experimenteller Beleg für einen Vorzeichenwechsel des AHE als Funktion des Magnetfeldes. Dabei zeigen die Kurven in Abbildung 5.19 eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zu den in dieser Arbeit untersuchten Messungen. Die Autoren führen dieses Verhalten, mit Verweis auf die Veröffentlichung von Jungwirth et. al [88], ebenfalls auf den Beitrag der Berry-Phase zurück.

Die Summe der vorgestellten Beispiele deutet darauf hin, dass ein Vorzeichenwechsel des anomalen Beitrages als typische Eigenschaft magnetischer Systeme angesehen werden kann, der unter bestimmten Bedingungen, wie die passende Ladungsträgerdichte oder Unordnungsgrad, als Funktion der Spinaufspaltung in Erscheinung tritt. Häufig geschieht dies mit der Berry-Phase als dominierende Mechanismus.

5.3.3 Skalierung des AHE

In [Abbildung 5.20](#) wird das Skalierungsverhalten der anomalen Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} bezüglich der Längsleitfähigkeit σ_{xx} untersucht. Dazu werden aus sämtlichen Messungen³ der Proben M0–M4 σ_{xy}^{AHE} und σ_{xx} jeweils bei einem Messpunkt mit negativem und positivem AHE-Beitrag ausgelesen. In der Regel liegen dabei negative Werte im Bereich geringerer Magnetfelder und positive Werte im Bereich höherer Magnetfelder. Daher wird darauf geachtet, nach Möglichkeit die Messpunkte so zu wählen, dass der Betrag von B_J jeweils für alle positiven bzw. negativen Leitfähigkeitswerte gleich ist. Dies spielt vor allem bei den temperaturabhängigen Messungen eine Rolle. Auf das prinzipiell bessere Vorgehen, nur vollständig magnetisierte Bereiche ($B_J \approx 1$) zu betrachten, wurde verzichtet. Dies würde Messungen bei höheren Temperaturen und den negativen Bereich des AHE ausschließen und damit die Analyse deutlich einschränken. Weiterhin wurde, wie im vorhergehenden Abschnitt, die rechnerische Leitfähigkeit für den dreidimensionalen Fall ermittelt und jeweils durch eine zweite Maßstabsleiste veranschaulicht. Die Ergebnisse sind für den negativen ([Abbildung 5.20\(a\)](#)) bzw. positiven ([Abbildung 5.20\(b\)](#)) AHE-Bereich separat zusammengefasst.

Die negativen Messpunkte der anomalen Hall-Leitfähigkeit ([Abbildung 5.20\(a\)](#)) ordnen sich nach [\[100\]](#) vornehmlich im „Dirty“-Regime ($\sigma_{xx} < \pi e^2/h \approx 1,22 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$), an der Grenze zum intrinsischen Bereich ein (siehe auch [Abschnitt 2.6.2](#)). Hierbei ist bemerkenswert, dass die in [Abschnitt 4.3](#) ermittelte kritische Leitfähigkeit $\sigma_c \approx 1,37 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ in guter Näherung der Übergangsstelle zwischen intrinsischem und „Dirty“-Regime entspricht. Dementsprechend befinden sich die meisten Werte auf der isolierenden Seite des MIT. Die Messpunkte folgen dabei über einen großen Leitfähigkeitsbereich der erwarteten Skalierungsrelation $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$ des isolierenden Regimes [\[117\]](#). Dieses eindeutige Verhalten manifestiert sich ungeachtet der Tatsache, dass sich einzelne Messpunkte in ihrem Magnetisierungsgrad unterscheiden können, was die Skalierungsrelation mutmaßlich beeinflusst.

Die Messpunkte der positiven AHE-Beiträge verteilen sich größtenteils im intrinsischen Bereich ($\sigma_{xx} > \pi e^2/h$) und zeigen folglich im Bilde der kritischen Leitfähigkeit σ_c metallisches Verhalten. Einige Messpunkte ordnen sich jedoch auch auf der isolierenden Seite des MIT an. Das Schlüsselmerkmal an dieser Stelle ist, dass sich das Skalierungsverhalten beim Durchschreiten des MIT offenkundig verändert. In der isolierenden Phase gilt für die anomale Hall-Leitfähigkeit, auch bei positivem Vorzeichen, die erwartete Skalierungsrelation $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$. Bei Messpunkten, die der metallischen Phase zuzuordnen sind, variiert σ_{xy}^{AHE} über einen Bereich von 3 Dekaden zwischen 10^{-7} und $10^{-4} \Omega^{-1}$, während $\sigma_{xx} \approx 2 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ nahezu konstant bleibt. Lediglich die Probe M0 liegt bei höheren Leitfähigkeitswerten. Im metallischen Bereich ist daher kein deutliches Skalierungsverhalten mehr erkennbar.

³Betrachtet werden alle Tieftemperaturmessungen bis 9 K, einschließlich der gateabhängigen Messungen.

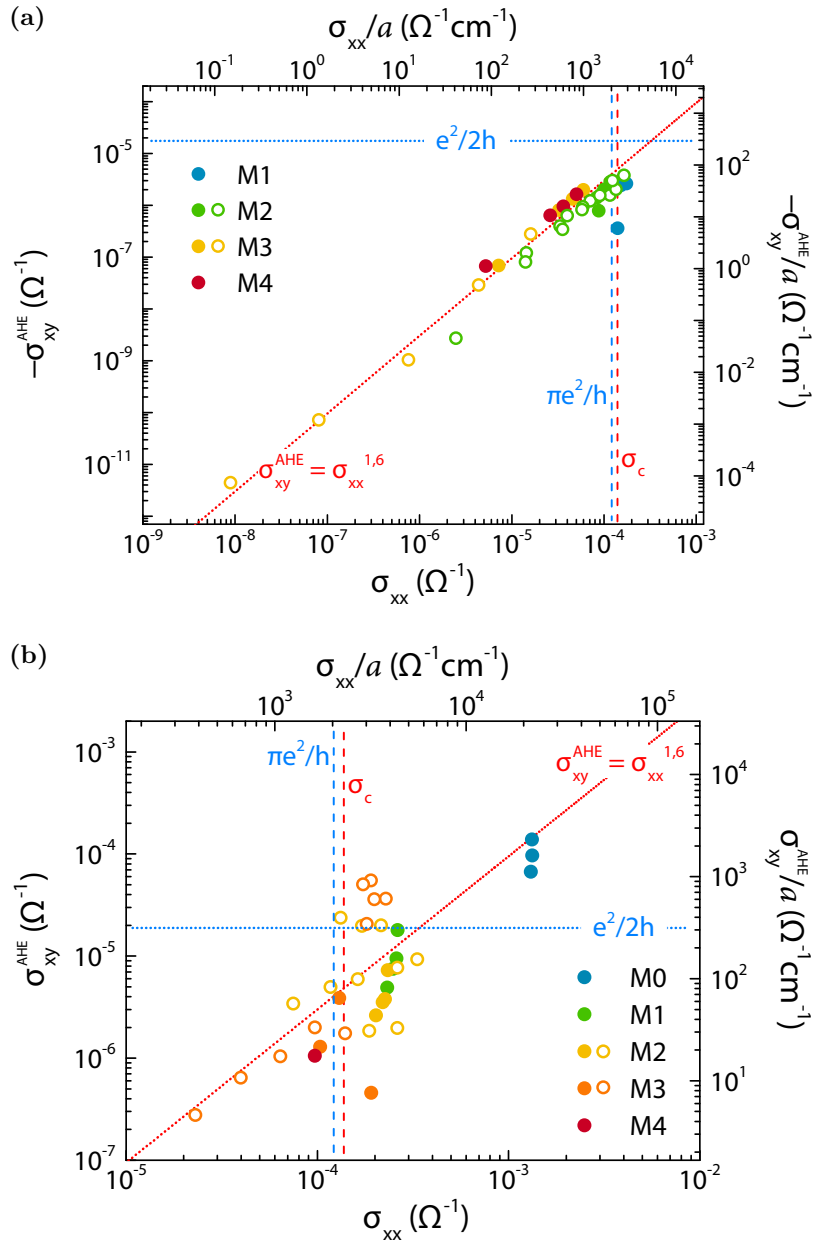


Abbildung 5.20 Doppellogarithmische Darstellung der (a) negativen und (b) positiven anomalen Hall-Leitfähigkeit σ_{xy}^{AHE} als Funktion der Längsleitfähigkeit σ_{xx} bei ausgewählten Magnetfeldwerten der Proben M0–M4. Gefüllte Punkte (●) repräsentieren Messdaten der einzelnen Proben im Temperaturbereich 1,7–9 K, leere Kreise (○) stammen aus gateabhängigen Messungen im selben Temperaturbereich. Die gepunktete rote Linie illustriert den Zusammenhang $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$. Die blaue und rote gestrichelte Linie kennzeichnen den Übergang zum „Dirty“-Regime bei $\sigma_{xx} \approx \pi e^2/h$ [100] bzw. die kritische Leitfähigkeit des MIT bei $\sigma_c \approx 1,37 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ (Abschnitt 4.3). Die blaue gepunktete Linie illustriert den oberen Grenzwert der intrinsischen anomalen Hall-Leitfähigkeit [87, 113]. Die obere und rechte Maßstabsleiste veranschaulichen die rechnerische dreidimensionale Leitfähigkeit (σ/a) bei einer Gitterkonstante $a \approx 6 \text{ \AA}$. Weitere Informationen finden sich im Fließtext.

Die blaue gepunktete Linie in den Abbildungen illustriert den intrinsischen Beitrag zur anomalen Hall-Leitfähigkeit. Diese Größenordnung wird in Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage [113] etwa ab dem intrinsischen Bereich ($\sigma_{xx} = \pi e^2/h$) erreicht oder sogar überschritten. Der Beitrag des Side-Jump wird im Vergleich dazu allgemein als um einige Größenordnungen kleiner eingeschätzt [24]. Die Fragestellung, ob hierbei der Beitrag der Berry-Phase tatsächlich dominiert, ist komplex. Ein Ansatz von Tian et al. [118] zur Trennung des Side-Jump- und Berry-Phase-Beitrages ist aufgrund der Auswirkungen der starken Lokalisierung nicht anwendbar. Darüber hinaus existieren zum einen für das vorliegende System keine Modellrechnungen, zum anderen variieren Simulationen für verwandte Systeme je nach Unordnungsgrad, Dotierkonzentration, Ladungsträgerdichte und weiteren Einflussfaktoren ausgesprochen stark. Dementsprechend kann der intrinsische Beitrag für „Bulk“-Material je nach Veröffentlichung in einem Bereich zwischen 10^1 und $10^3 \Omega^{-1}cm^{-1}$ liegen [88, 100, 186, 188]. In diesem Bereich lassen sich die meisten Messpunkte lokalisieren (Abbildung 5.20, rechte Skala), wonach eine Dominanz der intrinsischen Phase für dieses Material zumindest wahrscheinlich ist. Lediglich bei stark lokalisierten Messungen, tief im isolierenden Regime, wird der Beitrag der Berry-Phase unterdrückt. Daher könnte in diesem Bereich der Side-Jump-Mechanismus eine Rolle spielen. Der weitere Anstieg von σ_{xy}^{AHE} bei der Probe M0 könnte auf den zunehmenden Einfluss des Skew-Scattering-Prozesses bei höherem σ_{xx} hindeuten.

5.4 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde der anomale Hall-Effekt in InAs:Mn als Funktion der Mn-Konzentration, Temperatur und Gatespannung untersucht. Der Hall-Widerstand zeigt einen komplexen Verlauf, der sowohl durch den anomalen als auch durch den Quanten-Hall-Effekt geprägt ist. Der AHE in den stark lokalisierten Proben zeigt bei tiefen Temperaturen einen deutlichen negativen Beitrag, der mit zunehmendem Magnetfeld sein Vorzeichen wechselt. Die Beitragshöhe wird durch den Lokalisierungsgrad bestimmt und kann durch eine Erhöhung der Mn-Konzentration oder Verarmung von Ladungsträgern mittels Topgate gesteigert werden. Ein positives Vorzeichen des AHE ist in der Probe mit vergleichsweise geringer Lokalisierung zu finden.

Der magnetfeldabhängige Widerstandsverlauf kann für die meisten Messungen durch ein einfaches Modell angefitet werden, wobei die Magnetisierung durch die Brillouin-Funktion genähert wird. Der beobachtete Vorzeichenwechsel ergibt sich in diesem Fall durch den negativen Beitrag des gemeinsamen Terms aus intrinsischem und Side-Jump-Mechanismus und einem positiven Beitrag des Skew-Scattering-Mechanismus. Ersterer dominiert bei schwächeren, letzterer bei stärkeren Magnetfeldern. Die aus dem Fit resultierenden Parameter wurden im Kontext theoretischer Vorhersagen eingeordnet. Eine belastbare quantitative Analyse der maßgeblichen AHE-

Mechanismen war dabei allerdings nicht möglich. Daneben wurde der Vorzeichenwechsel anhand einschlägiger Veröffentlichungen als Funktion der Spinpolarisation diskutiert.

Zuletzt wurde das Skalierungsverhalten des AHE bezüglich der Probenleitfähigkeit untersucht. Dabei können zwei Bereiche festgemacht werden, die durch den MIT – charakterisiert durch die kritische Leitfähigkeit σ_c ([Abschnitt 4.3](#)) – voneinander getrennt sind. Auf der isolierenden Seite zeigt sich der für dieses Regime typische Skalierungszusammenhang $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$. Auf der metallischen Seite variiert der AHE unabhängig von der Probenleitfähigkeit, wodurch sich kein eindeutiges Skalierungsverhalten feststellen lässt. Der Vergleich mit Modellrechnungen verwandter Materialsysteme deutet oberhalb von σ_c auf die Dominanz des intrinsischen Mechanismus hin, welcher mit zunehmender Lokalisierung unterdrückt wird.

6 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem anomalen Hall-Effekt (AHE) und dem Metall-Isolator-Übergang (MIT) in zweidimensionalen InAs:Mn-Lochsystemen. Das untersuchte Material zeigt selbst bei tiefen Temperaturen paramagnetisches Verhalten und ist zusätzlich durch starke Lokalisierungseffekte geprägt. Damit gehört es im Umfeld des anomalen Hall-Effektes zu einer eher ungewöhnlichen Materialklasse, zu der es nur wenige vergleichbare experimentelle und theoretische Arbeiten gibt. Ziel war es daher, durch systematische Messungen die experimentellen Grundlagen für die Beschreibung des AHE und MIT im Kontext niedrigdimensionalen Transports zu schaffen. Ein Hauptaugenmerk lag dabei auch auf den Auswirkungen des magnetfeldgetriebenen MIT auf den anomalen Hall-Beitrag.

Die Transportmessungen wurden anhand von 5 Proben unterschiedlicher Mn-Dotierung durchgeführt. Jede Probe verfügte zusätzlich über eine Topgate-Elektrode, mit der die Ladungsträgerdichte effektiv beeinflusst werden konnte. Die Grundlage für das Auftreten der beobachteten Effekte bildet die Segregation von Mn beim MBE-Wachstum. Dabei wird aus der Dotierschicht eine signifikante Menge magnetischer Störstellen in den leitenden Kanal eingebracht, deren Anzahl mit der Dotierkonzentration wächst. Als Konsequenz zeigen die Proben einen starken Lokalisierungseffekt, der mit wachsender Mn-Konzentration zunimmt und zu unterschiedlichen Transporteigenschaften führt.

Das Transportverhalten der Proben geringer Leitfähigkeit kann bei tiefen Temperaturen dem Efros-Shklovskii Variable-Range-Hopping zugeordnet werden. Mit steigender Temperatur beobachtet man für Proben höherer Mn-Konzentration einen Übergang zum Nearest-Neighbour-Hopping, während Proben niedrigerer Mn-Konzentration eine für Metalle typische T^2 -Abhängigkeit zeigen. Diesen Proben gemein ist ein äußerst ausgeprägter negativer Magnetowiderstand (NMR), der aufgrund der starken p-d-Austauschwechselwirkung zustande kommt und im Bilde gebundener magnetischer Polaronen beschrieben werden kann. Dabei erfährt die Probe mit steigendem Magnetfeld einen Übergang von isolierendem zu metallischem Verhalten. Dies konnte als ein Hauptergebnis dieser Arbeit durch temperaturabhängige Widerstandskennlinien belegt werden. Sowohl die NMR-Stärke als auch das kritische Magnetfeld, an dem der Metall-Isolator-Übergang stattfindet, wächst mit steigender Mn-Konzentration. Bei einer genügend hohen Leitfähigkeit des Materials können die Transporteigenschaften nicht mehr im Bild des Hopping-Transports beschrieben werden. Dies war bei der Probe mit der geringsten Mn-Konzentration der Fall. Sie zeigt zwar ebenfalls einen NMR, der allerdings wesentlich geringer ausfällt

und durch die sogenannte „spin disorder scattering formula“ gedeutet werden kann. Einen magnetfeld-induzierten MIT weist diese Probe nicht auf.

Daneben wurde der Einfluss einer Gateelektrode untersucht, mit deren Hilfe Ladungsträger im leitenden Kanal angereichert oder verdrängt werden können. Die Ergebnisse belegen einen starken Einfluss auf den Magnetowiderstand und den Metall-Isolator-Übergang. Dabei hat eine Verringerung der Ladungsträgerdichte durch das Gate einen ähnlichen Effekt zur Folge wie die Erhöhung der Mn-Konzentration. Daraus lässt sich der Quotient aus Mn-Konzentration im QW und Ladungsträgerdichte (N_0^{qw}/p_s) ableiten, der bei einer Erhöhung zu stärkeren Lokalisierungseffekten und – wie später noch beschrieben – zu einem höheren Beitrag des anomalen Hall-Effektes führt. Zudem konnte durch die detaillierte Analyse aller Messungen ein kritischer Widerstand $\rho_c = 7290 \Omega$ bzw. kritische Leitfähigkeit $\sigma_c = 1,37 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ ermittelt werden, bei dessen Überschreitung der Metall-Isolator-Übergang stattfindet.

Ein weiteres Hauptergebnis dieser Arbeit ist die Beobachtung eines prägnanten anomalen Hall-Widerstandes, der dem gewöhnlichen Hall-Effekt zunächst entgegengerichtet, d. h. negativ ist und mit zunehmendem Magnetfeld sein Vorzeichen wechselt. Durch Erhöhung der Mn-Konzentration oder Verdrängung von Ladungsträgern kann die Beitragshöhe enorm gesteigert werden. Dieses Verhalten kann eindeutig mit der Lokalisierung der Ladungsträger verknüpft werden. Interessant ist, dass wiederum die Probe mit der geringsten Mn-Konzentration eine Ausnahme bildet und einen positiven Beitrag des AHE zeigt.

Der magnetfeldabhängige Widerstandsverlauf der meisten Proben kann durch die einfache empirische Gleichung $\rho_{yx}^{AHE} = (a\rho_{xx} + b\rho_{xx}^2) \cdot B_J$, mit der Brillouin-Funktion B_J , beschrieben werden. Der Vorzeichenwechsel ergibt sich in diesem Ansatz durch die unterschiedlichen Vorzeichen der Parameter a und b . Darüberhinaus zeigen die vorliegenden Messungen eine gute qualitative Übereinstimmung mit theoretischen Berechnungen, die den Vorzeichenwechsel als Ursache der zunehmenden Spinpolarisation der magnetischen Momente sehen. Hierbei zeigt sich beim vorliegenden System vor allem die Ladungsträgerdichte als Einflussfaktor.

Die Untersuchung des Skalierungsverhaltens des AHE bezüglich der Probenleitfähigkeit offenbarte zwei Regime, die durch die kritische Leitfähigkeit $\sigma_c = 1,37 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1}$ des MIT voneinander getrennt sind. Unterhalb dieses Wertes – auf der isolierenden Seite – zeigt sich der für dieses Regime typische Skalierungszusammenhang $\sigma_{xy}^{AHE} \propto \sigma_{xx}^{1,6}$, während oberhalb – auf der metallischen Seite – kein eindeutiges Verhalten mehr erkennbar ist. In diesem Bereich variiert die anomale Hall-Leitfähigkeit unabhängig von der Probenleitfähigkeit. Der Vergleich mit Modellrechnungen verwandter Materialsysteme deutet auf der metallischen Seite des MIT die Dominanz des intrinsischen Mechanismus an. Für eine detaillierte Analyse wären Modellrechnungen der Bandstruktur des vorliegenden Materialsystems lohnenswert.

A Anhang

A.1 Symmetrisierung der Messdaten

Aus der Onsager-Relation ([Gleichung 2.17](#)) lassen sich für den Widerstands- bzw. Leitfähigkeitstensor gewisse Symmetriebedingungen ableiten. Demnach ist der magnetfeldabhängige Längswiderstand ρ_{xx} symmetrisch bezüglich der y-Achse, das heißt $\rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(-B)$. Der Hall-Widerstand ρ_{xy} hingegen ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs (antisymmetrisch), woraus folgt dass $\rho_{yx}(B) = -\rho_{yx}(-B)$. Aufgrund experimenteller Unzulänglichkeiten kann es zur Überlagerung von Messsignalen kommen, wodurch diese Symmetriebedingungen nicht mehr erfüllt sind. Beispielsweise führen in Stromrichtung zueinander leicht versetzte Hall-Abgriffe, die bei der Probenpräparation nicht zu vermeiden sind, zu einem Anteil des Längswiderstandes im Hall-Signal. Besonders bei sehr hochohmigen Proben kann dieser Anteil in der gleichen Größenordnung oder höher als ρ_{yx} sein und damit den Hall-Effekt überlagern ([Abbildung A.1](#) rote Kurve). Durch einfache Symmetrieüberlegungen können jedoch Längs- und Hallwiderstand von störenden Beiträgen bereinigt werden. Es gilt:

$$\rho_{xx} = \frac{\rho_{xx,roh}(B) + \rho_{xx,roh}(-B)}{2} , \quad (\text{A.1})$$

$$\rho_{yx} = \frac{\rho_{yx,roh}(B) - \rho_{yx,roh}(-B)}{2} . \quad (\text{A.2})$$

Sämtliche magnetfeldabhängige Experimente wurden bei beiden Feld-Polaritäten gemessen und anschließend unter Anwendung der obigen Gleichungen symmetrisiert. Die blaue Kurve in [Abbildung A.1](#) zeigt den Verlauf des bereinigten Hallwiderstandes für eine Probe mit starker Lokalisierung um $B = 0$.

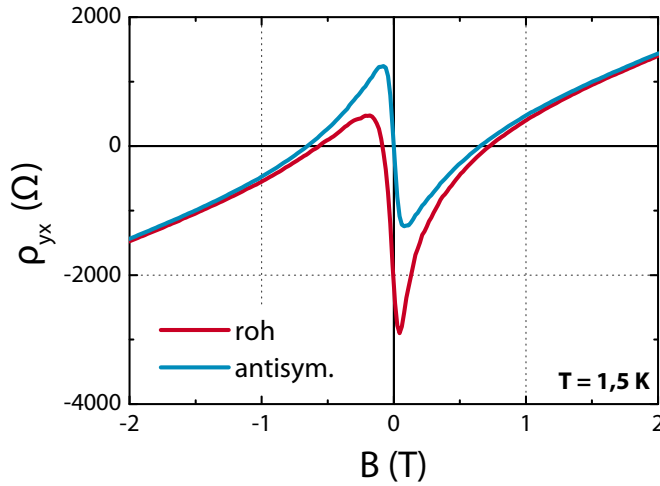


Abbildung A.1 Hallwiderstand ρ_{yx} der Probe M3: Rohdaten der Messung (rot) und antisymmetrischer Anteil (blau).

A.2 Modifizierte Brillouin-Funktion

Die Magnetisierung der untersuchten Heterostruktur wird im Wesentlichen durch die Brillouin-Funktion beschrieben (siehe [Abschnitt 2.2](#)). Unter Berücksichtigung der p-d-Austauschwechselwirkung, die in InAs:Mn stark ausgeprägt ist, kann ein weiterer Mechanismus bei der Ausrichtung der magnetischen Momente angenommen werden. Auf der einen Seite richten sich die Mn-Ionen durch ein äußeres Magnetfeld direkt aus, auf der anderen Seite koppeln diese antiferromagnetisch an die p-artigen Löcher des Valenzbandes. Die Löcher wiederum werden selbst im Magnetfeld ausgerichtet ([Abbildung A.2](#)).

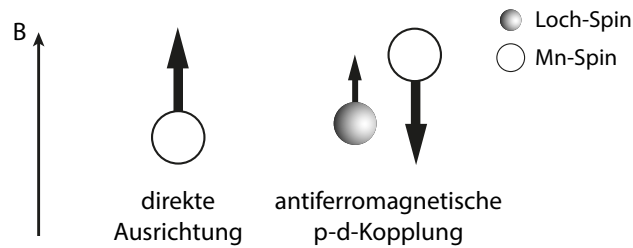


Abbildung A.2 Annahme zweier konkurrierender Mechanismen bei der Ausrichtung der Mn-Spins: Direkte Ausrichtung durch B und Ausrichtung der Löcher durch B und antiferromagnetische Kopplung des Loch- und Mn-Spins aufgrund der p-d-Wechselwirkung.

Bei der Berücksichtigung dieser zwei Mechanismen in der Brillouin-Funktion betrachten wir zunächst den Beitrag der Valenzbandlücken zum Paramagnetismus (Pauli-Paramagnetismus) in einem zweidimensionalen Lochgas. Liegt ein Magnetfeld an, verschieben sich die Energiesubbande mit Spin-up und Spin-down um $g_h \mu_B B$ zueinander, wobei g_h der g-Faktor der Valenzbandlücken ist (siehe [Abschnitt 2.2.3](#)). Es bildet sich im Gleichgewichtsfall eine gemeinsame Fermi-Energie aus, voraus ein Überschuss an Löchern mit gleicher Spinausrichtung resultiert. Diese Situation ist

in [Abbildung 2.11](#) illustriert. Für die Anzahl $\Delta N = |n_{\uparrow} - n_{\downarrow}|$ der Überschuss-Spins ergibt sich:

$$\Delta N = \frac{1}{2} D(E) |g_h| \mu_B B . \quad (\text{A.3})$$

Die Spinrichtung der Majoritäts-Spins hängt dabei vom Vorzeichen des g-Faktors ab. Für die Magnetisierung der Löcher ergibt sich mit der obigen Gleichung:

$$M = \frac{1}{2} D(E) g_h \mu_B^2 B = \chi_{\text{Pauli}} B . \quad (\text{A.4})$$

Daraus leiten wir analog zu [Abschnitt 2.2.1](#) den Ansatz für die modifizierte Brillouin-Funktion $B_J^* \{\tilde{x}\}$ ab. Der Parameter $\tilde{x} = g_{Mn} \mu_B J B / k_B T$, der sich aus der Zeeman-Aufspaltung ergibt, wird um den Beitrag der Spinaufspaltung durch die p-d-Austauschwechselwirkung der magnetisierten Löcher ergänzt [\[189\]](#):

$$B_J^* \{\tilde{x}\} = B_J^* \left\{ \frac{J_{pd} \Delta N J}{k_B T} + \frac{g_{Mn} \mu_B J B}{k_B T} \right\} . \quad (\text{A.5})$$

Durch Einsetzen der [Gleichung A.3](#), der 2D-Zustandsdichte $D(E) = m_{hh}^* / \pi \hbar^2$ und $J = 5/2$ erhält man:

$$B_J^* \left\{ \frac{1}{k_B T} \cdot \frac{5}{2} \mu_B \cdot B \left[\underbrace{J_{pd} \frac{1}{2} \frac{m_{hh}^*}{\pi \hbar^2} g_h}_{c_{pd}} + g_{Mn} \right] \right\} . \quad (\text{A.6})$$

Dabei ist m_{hh}^* die effektive Masse des Schwerlochbandes. Üblicherweise geht man davon aus, dass das Austauschintegral J_{pd} im Valenzband ein negatives Vorzeichen hat (siehe [Abschnitt 2.4](#)) und g_h positiv [\[45\]](#) ist. Das würde zu einem konkurrierenden Verhalten der beiden Mechanismen führen, das die Ausrichtung der magnetischen Momente im Magnetfeld hemmt. Allerdings ist ein Vorzeichenwechsel des g-Faktors möglich. Nilsson et al. [\[190\]](#) konnten bei der Berechnung der effektiven Masse und des g-Faktors von InAs/GaSb-Quantentrögen zeigen, dass ein Vorzeichenwechsel unter dem Einfluss eines externen Magnetfeldes auftreten kann. Zudem zeigten Berechnungen des g-Faktors in InAs/GaAs-Quantenpunkten [\[191\]](#) eine Änderung des Vorzeichens als Funktion der angelegten elektrischen Feldstärke. Weiterhin wurde von Snelling et. al [\[192\]](#) bei ihren Betrachtungen auch ein Einfluss der Trogbreite auf das Vorzeichen in GaAs/AlGaAs-Quantentrögen gezeigt. Zur Abschätzung der Größenordnung des zusätzlichen Beitrags nehmen wir für InAs:Mn typische Werte¹ an: $J_{pd} = 0,156 \text{ eV nm}^3$ [\[52\]](#), $m_{hh}^* = 0,5 m_0$, $g_h = 7,6$ [\[45\]](#). Dadurch ergibt sich $c_{pd} \approx 0,7$ und damit in etwa die gleiche Größenordnung wie g_{Mn} . [Abbildung A.3](#) illustriert den Einfluss eines so dimensionierten zusätzlichen Beitrags auf die Brillouin-Funktion.

¹Bei 2DHG: $J_{pd}/a = 0,089 \text{ eV nm}^2$ mit der Gitterkonstante für InAs $a = 0,6058 \text{ nm}$

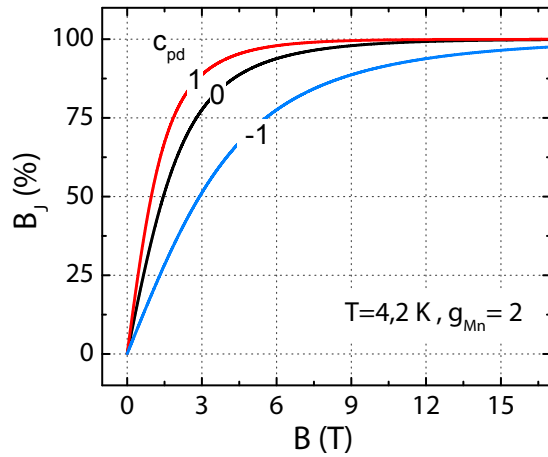


Abbildung A.3 Modifizierte Brillouin-Funktion unter der Annahme eines zusätzlichen Beitrags c_{pd} aufgrund der p-d-Austauschwechselwirkung. Positive Werte von c_{pd} unterstützen, negative Werte hemmen die Ausrichtung der Mn-Ionen im Magnetfeld.

A.3 Ergänzende Daten

Tabelle A.1 Fitparameter a , $-b$ und die Ladungsträgerdichte p_s der Gleichung 5.2. Die Daten wurden aus den Fitkurven der gateabhängigen Messungen der Probe M2 in Abbildung 5.12 extrahiert, wobei A einer maximal angereicherten und E einer maximal verarmten Probe entspricht. Zusätzlich ist zum Vergleich die Ladungsträgerdichte, ermittelt aus den SdH-Oszillationen, angegeben.

#	a	$-b$ ($10^{-5} \Omega^{-1}$)	p_s 10^{11} cm^{-1} (Hall)	p_s 10^{11} cm^{-1} (SdH)
A	0,058	1,38	9,43	9,55
B	0,091	1,37	7,50	7,40
C	0,080	0,86	6,24	6,25
D	0,037	0,23	5,09	5,56
E	0,024	0,05	4,32	4,90

Tabelle A.2 Fitparameter a , $-b$ und Ladungsträgerdichte p_s der Gleichung 5.2. Extrahiert aus den Fitkurven der Proben M0–M4 in Abbildung 5.11. Die Fitparameter der Probe M0 haben aufgrund des schlechten Fitresultats nur eine eingeschränkte Gültigkeit. Zum Vergleich ist zusätzlich die Ladungsträgerdichte, ermittelt aus den SdH-Oszillationen, angegeben.

#	T (K)	a	-b ($10^{-5} \Omega^{-1}$)	$p_s 10^{11} \text{ cm}^{-1}$ (Hall)	$p_s 10^{11} \text{ cm}^{-1}$ (SdH)
M1	1,7	0,15	2,28		
	4,2	0,23	4,77	5,95	5,98
	6	0,33	7,11		
	9	0,50	10,92		
M2	1,7	0,07	0,87		
	4,2	0,10	1,80	7,05	6,88
	6	0,13	2,51		
	9	0,22	4,14		
M3	1,7	0,042	0,35		
	4,2	0,061	0,99	8,72	8,73
	6	0,074	1,30		
	9	0,091	1,65		
M4	1,7	0,027	0,15		
	4,2	0,038	0,55	13,10	13,33
	6	0,045	0,75		
	9	0,048	0,95		
M0	0,04	0,98	20,47		
	0,5	0,52	37,53	14,54	15,72
	1,7	0,46	47,30		

A.4 Rezeptliste

1. Mesastrukturierung

- Probe mit Diamantritzer anritzen und in $(4 \times 4) \text{ mm}^2$ große Stücke brechen
- Standardreinigung
 - Acetonbad 1 min in Ultraschall
 - 3 Acetonbäder jeweils 30 s
 - Zwischenlagerung in Propanolbad
- Belacken (Photolack)
 - Probe auf Drehteller legen, ansaugen, mit Stickstoff trockenblasen
 - Photolack ARP 3740 auf Probe träufeln bis sie vollständig bedeckt ist
 - Lack mit den Parametern 5 s bei 3000 U/min und 30 s bei 6000 U/min aufschleudern
 - auf der Heizplatte bei 90°C für 6 min ausheizen
- Im Maskaligner 4 min bei 315 W durch Photomaske # 43 belichten
- Entwickeln
 - 40 s in $\text{H}_2\text{O} : \text{NaOH}$ (AR 300-26) = 3 : 1, Probe wird dabei im Entwickler bewegt
 - Vorgang durch 35 s in Reinstwasser (Kaskadenspülung) stoppen
 - mit Stickstoff trockenblasen
 - Kontrolle im Lichtmikroskop
- Nasschemisches Ätzen
 - 40 s in Essigsäure : H_2O_2 : H_2O = 5 : 1 : 5
 - Ätzprozess durch 40 s in Reinstwasser (Kaskadenspülung) stoppen
- Lack durch Standardreinigung entfernen, mit Stickstoff trockenblasen
- Ätztiefe mit Profilometer prüfen

2. Ohmsche Kontakte

- Kontaktflächen der Probe mit Diamantnadel anritzen
- InZn (4-6 % Zn, In 6N) mit LötKolben auf Kontaktflächen aufbringen
- 60 s Einlegieren bei 350°C unter Formiergasatmosphäre (Type II)

3. Isolatorschicht

- a) $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$

- Standardreinigung
- Beschichtung mit ca. 14 nm SiO₂ im PECVD System „*PLASMA-LAB 80 plus*“ als Keimschicht für die darauffolgende Aluminiumoxidschicht:
 - 2 x 10 s bei 150° C Probenkammertemperatur
 - zwischen den zwei Vorgängen Probenkammer belüften
- 24 Std. Pause vor dem nächsten Prozessschritt
- Beschichtung mit 50 nm Al₂O₃ im ALD System „*Savannah 100*“:
 - 100 Zyklen bei 80° C Probenkammertemperatur und 60 s Spülzeit
 - 400 Zyklen bei 150° C Probenkammertemperatur und 40 s Spülzeit

b) Parylene C

- Standardreinigung
- Beschichtung mit ca. 300 nm Parylene (etwa 300 g Parylenegranulat - abhängig von Furnacetemperatur)
- Schichtdicke mit Weißlichtinterferometer prüfen

4. Gate

- Belacken (wie oben)
- Belichten
 - Kreuzstruktur der Maske # 52 4,5 min auf Probe belichten
- Entwickeln (wie oben)
- Aufdampfen
 - Aufdampfanlage „*Univex 450 Leybold*“ mit $5 \cdot 10^{-6}$ bar Basisdruck
 - 1 min mit Argonplasma vorsputtern
 - 120 nm Gold bei 2 Å/s aufdampfen
- Lift-Off
 - Probe in Aceton legen (evtl. Ultraschall)
 - Abspülen des überschüssigen Metalls
- Standardreinigung inklusive trockenblasen mit Stickstoff
- Kontrolle im Lichtmikroskop

5. Fertigstellung der Probe

- eventuell Probe ritzen und teilen
- Standardreinigung der Probe (ohne Ultraschall) und des Chipcarriers

- Probe mit PMMA in Chipcarrier kleben
- Indium mit Lötkolben auf Gatefläche außerhalb der Mestastruktur aufbringen
- Bonden

Literaturverzeichnis

- [1] J. Bardeen und W. H. Brattain: *The Transistor, A Semi-Conductor Triode*. [Phys. Rev.](#) **74**, 230 (1948).
- [2] G. Moore: *Cramming More Components Onto Integrated Circuits*. *Electronics* **38**, 114 (1965).
- [3] S. H. Fuller und L. I. Millett (Hg.): *The Future of Computing Performance*. [The National Academies Press, Washington](#) (2011).
- [4] Werbeanzeige des ersten tragbaren Radios.. Abgerufen am 24.10.2015. <http://www.fazano.pro.br/port105.html>
- [5] G. A. Prinz: *Hybrid Ferromagnetic-Semiconductor Structure*. [Science](#) **250**, 1092 (1990).
- [6] S. A. Wolf: *Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future*. [Science](#) **294**, 1488 (2001).
- [7] Petrus Peregrinus de Maricourt: *Epistola de Magnete*. [Augsburgi in Sueuis: Philipp Ulhart, Augsburg](#) (1558). Editio princeps.
- [8] M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert *et al.*: *Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices*. [Phys. Rev. Lett.](#) **61**, 2472 (1988).
- [9] P. Grünberg, R. Schreiber, Y. Pang *et al.*: *Layered magnetic structures: Evidence for antiferromagnetic coupling of Fe layers across Cr interlayers*. [J. Appl. Phys.](#) **61**, 3750 (1987).
- [10] J. K. Furdyna: *Diluted magnetic semiconductors*. [J. Appl. Phys.](#) **64**, R29 (1988).
- [11] K. M. Yu, T. Wojtowicz, W. Walukiewicz *et al.*: *Fermi Level Effects on Mn Incorporation in III-Mn-V Ferromagnetic Semiconductors*. In T. Dietl, D. Awschalom, M. Kaminska *et al.* (Hg.): *Spintronics*, S. 89. [Academic Press, Amsterdam/London/Burlington/San Diego/New York](#)(2008).
- [12] H. Ohno: *Making Nonmagnetic Semiconductors Ferromagnetic*. [Science](#) **281**, 951 (1998).
- [13] H. Ohno, H. Munekata, T. Penney *et al.*: *Magnetotransport properties of p-type (In,Mn)As diluted magnetic III-V semiconductors*. [Phys. Rev. Lett.](#) **68**, 2664 (1992).
- [14] H. Ohno, A. Shen, F. Matsukura *et al.*: *(Ga,Mn)As: A new diluted magnetic semiconductor based on GaAs*. [Appl. Phys. Lett.](#) **69**, 363 (1996).

- [15] T. Dietl, A. Haury, und Y. Merle d'Aubigné: *Free carrier-induced ferromagnetism in structures of diluted magnetic semiconductors*. [Phys. Rev. B](#) **55**, R3347 (1997).
- [16] T. Dietl, H. Ohno, und F. Matsukura: *Hole-mediated ferromagnetism in tetrahedrally coordinated semiconductors*. [Phys. Rev. B](#) **63**, 195205 (2001).
- [17] H. Ohno, D. Chiba, F. Matsukura *et al.*: *Electric-field control of ferromagnetism*. [Nature](#) **408**, 944 (2000).
- [18] A. Van Esch, L. Van Bockstal, J. De Boeck *et al.*: *Interplay between the magnetic and transport properties in the III-V diluted magnetic semiconductor $Ga_{1-x}Mn_xAs$* . [Phys. Rev. B](#) **56**, 13103 (1997).
- [19] J. Jaroszynski: *Quantum Transport in Diluted Magnetic Semiconductors*. In J. Kossut und J. Gaj (Hg.): *Introduction to the Physics of Diluted Magnetic Semiconductors*, S. 517. [Springer-Verlag, Heidelberg/Dordrecht/London/New York](#)(2010).
- [20] B. R. Judd: *The Hall effect in the context of nineteenth-century physics*. In C. L. Chien und C. Westgate (Hg.): *The Hall Effect and Its Application*, S. 517. [Plenum Press, New York / London](#)(1980).
- [21] E. H. Hall: *On a new Action of the Magnet on Electric Currents*. [Am. J. Math.](#) **2**, 287 (1879).
- [22] E. H. Hall: *On the "Rotational Coefficient" in nickel and cobalt*. [Philos. Mag.](#) **12**, 157 (1881).
- [23] R. Karplus und J. Luttinger: *Hall Effect in Ferromagnetics*. [Phys. Rev.](#) **95**, 1154 (1954).
- [24] N. Nagaosa, S. Onoda, A. H. MacDonald *et al.*: *Anomalous Hall effect*. [Rev. Mod. Phys.](#) **82**, 1539 (2010).
- [25] K. v. Klitzing, G. Dorda, und M. Pepper: *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*. [Phys. Rev. Lett.](#) **45**, 494 (1980).
- [26] C. Goldberg und R. E. Davis: *New galvanomagnetic effect*. [Phys. Rev.](#) **94**, 1121 (1954).
- [27] D. C. Tsui, H. L. Stormer, und A. C. Gossard: *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*. [Phys. Rev. Lett.](#) **48**, 1559 (1982).
- [28] M. Dyakonov und V. Perel: *Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors*. [Physics Letters A](#) **35**, 459 (1971).
- [29] M. Onoda, S. Murakami, und N. Nagaosa: *Hall effect of light*. [Phys. Rev. Lett.](#) **93** (2004).
- [30] D. Xiao, W. Yao, und Q. Niu: *Valley-contrasting physics in graphene: Magnetic moment and topological transport*. [Phys. Rev. Lett.](#) **99** (2007).

- [31] B. A. Bernevig und S.-C. Zhang: *Quantum Spin Hall Effect*. [Phys. Rev. Lett.](#) **96**, 106802 (2006).
- [32] C.-Z. Chang, J. Zhang, X. Feng *et al.*: *Experimental observation of the quantum anomalous Hall effect in a magnetic topological insulator..* [Science](#) **340**, 167 (2013).
- [33] C. Kittel: *Einführung in die Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 14. überarbeitete und erweiterte Auflage (2005).
- [34] D. Weiss und W. Wegscheider. *Vorlesungsskript Halbleiterphysik*, [Universität Regensburg](#) (2006).
- [35] C. W. J. Beenakker und H. van Houten: *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures*. [Solid State Phys.](#) **44**, 1 (1991).
- [36] S. Datta: *Electronic transport in mesoscopic systems*. [Cambridge University Press](#) (1995).
- [37] U. Wurstbauer: *Herstellung und Charakterisierung von Mangan dotierten III-V Halbleiterheterostrukturen*. Dissertation, [Universität Regensburg](#) (2008).
- [38] J. Bauer: *Transporteigenschaften zweidimensionaler Lochsysteme*. Diplomarbeit, Universität Regensburg (2006).
- [39] H. B. Callen: *The application of Onsager's reciprocal relations to thermoelectric, thermomagnetic, and galvanomagnetic effects*. [Phys. Rev.](#) **73**, 1349 (1948).
- [40] Ch. Wensauer: *Anomaler Hall-Effekt in zweidimensionalen InAs:Mn-Lochsystemen*. Diplomarbeit, Universität Regensburg (2011).
- [41] H. Ibach und H. Lüth: *Festkörperphysik*. [Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg](#), 7. Auflage (2009).
- [42] M. Opel. *Vorlesungsskript Magnetismus*, [TU München](#) (2005).
- [43] N. W. Ashcroft und D. N. Mermin: *Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 3. Auflage (2007).
- [44] L. Bergmann und C. Schäfer: *Lehrbuch der Experimentalphysik - Festkörper*, Band 6. De Gruyter, Berlin/New York, 2. Auflage (2005).
- [45] R. Winkler: *Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems*. [Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg](#) (2005).
- [46] G. Dresselhaus: *Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures*. [Phys. Rev.](#) **100**, 580 (1955).
- [47] I. Žutić, J. Fabian, und S. Das Sarma: *Spintronics: Fundamentals and applications*. [Rev. Mod. Phys.](#) **76**, 323 (2004).
- [48] V. Lechner: *Bulk and Structure Inversion Asymmetry in Semiconductor Quantum Well Structures*. Dissertation, [Universität Regensburg](#) (2012).

- [49] E. I. Rashba: *Cyclotron and combinational resonance in a magnetic field perpendicular to the plane of the loop*. Sov. Phys. Solid State **2**, 1109 (1960).
- [50] P. Olbrich: *THz radiation induced spin polarized currents in low dimensional semiconductor structures*. Dissertation, [Universität Regensburg](#) (2010).
- [51] T. Ogawa und Y. Kanemitsu: *Optical properties of low-dimensional materials*. [World Scientific](#) (1998).
- [52] J. Okabayashi, T. Mizokawa, D. D. Sarma *et al.*: *Electronic structure of $\text{In}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ studied by photoemission spectroscopy: Comparison with $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$* . Phys. Rev. B **65**, 161203 (2002).
- [53] T. Dietl, D. Awschalom, M. Kaminska *et al.*: *Spintronics*, [Band 82. Academic Press](#) (2008).
- [54] D. Belitz und T. Kirkpatrick: *The Anderson-Mott transition*. Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).
- [55] P. a. Lee und T. V. Ramakrishnan: *Disordered electronic systems*. Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
- [56] E. Abrahams, S. V. Kravchenko, und M. P. Sarachik: *Metallic behavior and related phenomena in two dimensions*. Rev. Mod. Phys. **73**, 251 (2001).
- [57] N. F. Mott: *Metal-Insulator Transition*. [Taylor & Francis, London](#), 2. Auflage (1990).
- [58] N. F. Mott: *The Basis of the Electron Theory of Metals, with Special Reference to the Transition Metals*. Proc. Phys. Soc. Sect. A **62**, 416 (1949).
- [59] P. W. Anderson: *Absence of diffusion in certain random lattices*. Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [60] N. F. Mott: *Conduction in non-crystalline materials*. Clarendon Press, Oxford, 2. Auflage (1993).
- [61] M. Glunk: *Elektrische und magnetische Eigenschaften des verdünnten magnetischen Halbleiters (Ga,Mn)As*. Dissertation, [Universität Ulm](#) (2011).
- [62] T. Wang, K. Clark, G. Spencer *et al.*: *Magnetic-field-induced metal-insulator transition in two dimensions*. Phys. Rev. Lett. **72**, 709 (1994).
- [63] H. Fukuyama und K. Yosida: *Negative magnetoresistance in the Anderson localized states*. J. Phys. Soc. Japan **46**, 102 (1979).
- [64] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello *et al.*: *Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions*. Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [65] S. Anissimova, S. V. Kravchenko, A. Punnoose *et al.*: *Flow diagram of the metal-insulator transition in two dimensions*. Nat. Phys. **3**, 707 (2007).

- [66] T. Wojtowicz, M. Sawicki, J. Jaroszyński *et al.*: *Conductivity in a spin-polarized band near the metal-insulator critical point*. [Phys. B Condens. Matter](#) **155**, 357 (1989).
- [67] W. Allen, E. Gwinn, T. Kreutz *et al.*: *Anomalous Hall effect in ferromagnetic semiconductors with hopping transport*. [Phys. Rev. B](#) **70**, 125320 (2004).
- [68] A. L. Efros und B. I. Shklovskii: *Coulomb gap and low temperature conductivity of disordered systems*. [J. Phys. C Solid State Phys.](#) **8**, L49 (1975).
- [69] M. Pepper: *The Magnetic Field Induced Metal-Insulator Transition*. In D. M. Finlayson (Hg.): *Localization and interaction in disordered metals and doped semiconductors*, S. 291. [SUSSP Publications, Edingburgh](#)(1986).
- [70] T. Wojtowicz, T. Dietl, M. Sawicki *et al.*: *Metal-insulator transition in semi-magnetic semiconductors*. [Phys. Rev. Lett.](#) **56**, 2419 (1986).
- [71] T. Dietl und J. Spalek: *Effect of thermodynamic fluctuations of magnetization on the bound magnetic polaron in dilute magnetic semiconductors*. [Phys. Rev. B](#) **28**, 1548 (1983).
- [72] T. Wojtowicz und A. Mycielski: *Magnetic field induced nonmetal - metal transition in the open - gap $Hg_{1-x}Mn_xTe$* . [Phys. B+C](#) **117-118**, 476 (1983).
- [73] A. Kaminski und S. Das Sarma: *Polaron percolation in diluted magnetic semiconductors..* [Phys. Rev. Lett.](#) **88**, 247202 (2002).
- [74] H. Ohno: *Mn-Based III-V Diluted Magnetic (Semimagnetic) Semiconductors*. [Mater. Sci. Forum](#) **182-184**, 443 (1995).
- [75] Y. Shapira, N. Oliveira, D. Ridgley *et al.*: *Magnetoresistance and Hall effect near the metal-insulator transition of $Cd_{1-x}Mn_xSe$* . [Phys. Rev. B](#) **34**, 4187 (1986).
- [76] M. Sawicki, T. Dietl, J. Kossut *et al.*: *Influence of s-d exchange interaction on the conductivity of $Cd_{1-x}Mn_xSe$: In the weakly localized regime*. [Phys. Rev. Lett.](#) **56**, 508 (1986).
- [77] T. Dietl (2015). Persönliche Kommunikation.
- [78] U. Wurstbauer, C. Śliwa, D. Weiss *et al.*: *Hysteretic magnetoresistance and thermal bistability in a magnetic two-dimensional hole system*. [Nat. Phys.](#) **6**, 955 (2010).
- [79] Supplementary Information der Referenz [78].
- [80] A. Kaminski und S. Das Sarma: *Magnetic and transport percolation in diluted magnetic semiconductors*. [Phys. Rev. B](#) **68**, 235210 (2003).
- [81] B. Altshuler und A. Aronov: *Zero bias anomaly in tunnel resistance and electron—electron interaction*. [Solid State Commun.](#) **88**, 115 (1993).
- [82] E. Pugh: *Hall Effect and the Magnetic Properties of Some Ferromagnetic Materials*. [Phys. Rev.](#) **36**, 1503 (1930).

- [83] J. Smit: *The spontaneous Hall effect in ferromagnetics II*. *Physica* **24**, 39 (1958).
- [84] L. Berger: *Side-Jump Mechanism for the Hall Effect of Ferromagnets*. *Phys. Rev. B* **2**, 4559 (1970).
- [85] M. C. Chang und Q. Niu: *Berry phase, hyperorbits, and the Hofstadter spectrum: semiclassical dynamics in magnetic Bloch bands*. *Phys. Rev. B* **53**, 7010 (1996).
- [86] G. Sundaram und Q. Niu: *Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and Berry-phase effects*. *Phys. Rev. B* **59**, 14915 (1999).
- [87] D. Xiao, M.-C. Chang, und Q. Niu: *Berry phase effects on electronic properties*. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1959 (2010).
- [88] T. Jungwirth, Q. Niu, und A. MacDonald: *Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic Semiconductors*. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 4 (2002).
- [89] M. V. Berry: *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*. *Proc. R. Soc. A* **392**, 45 (1984).
- [90] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi *et al.*: *The Geometric Phase in Quantum Systems*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (2003).
- [91] M. P. Marder: *Condensed Matter Physics*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2. Auflage (2011).
- [92] E. Manoukian: *Quantum Theory: A Wide Spectrum*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (2006).
- [93] J. J. Sakurai und S. F. Tuan: *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Überarbeitete Auflage (1993).
- [94] E. Y. Tsymbal und I. Žutić: *Handbook of Spin Transport and Magnetism*. CRC Press, Boca Raton/London/New York (2012).
- [95] M. Zittartz: *Anomaler Hall-Effekt in dotierten Kobaltaten*. Dissertation, Universität zu Köln (2002).
- [96] A. Fert und O. Jaoul: *Left-right asymmetry in the scattering of electrons by magnetic impurities, and a hall effect*. *Phys. Rev. Lett.* **28**, 303 (1972).
- [97] A. K. Majumdar und L. Berger: *Hall effect and magnetoresistance in pure iron, lead, Fe-Co, and Fe-Cr dilute alloys*. *Phys. Rev. B* **7**, 4203 (1973).
- [98] Y. Shiomi, Y. Onose, und Y. Tokura: *Extrinsic anomalous Hall effect in charge and heat transport in pure iron, $\text{Fe}_{0.997}\text{Si}_{0.003}$, and $\text{Fe}_{0.97}\text{Co}_{0.03}$* . *Phys. Rev. B* **79**, 100404 (2009).
- [99] Y. Pu, D. Chiba, F. Matsukura *et al.*: *Mott relation for anomalous hall and nernst effects in $\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x\text{As}$ ferromagnetic semiconductors*. *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008).

- [100] S. Onoda, N. Sugimoto, und N. Nagaosa: *Quantum transport theory of anomalous electric, thermoelectric, and thermal Hall effects in ferromagnets*. [Phys. Rev. B **77**, 165103 \(2008\)](#).
- [101] J. Ye, Y. Kim, A. Millis *et al.*: *Berry Phase Theory of the Anomalous Hall Effect: Application to Colossal Magnetoresistance Manganites*. [Phys. Rev. Lett. **83**, 3737 \(1999\)](#).
- [102] Y. Yao, L. Kleinman, A. H. MacDonald *et al.*: *First principles calculation of anomalous Hall conductivity in ferromagnetic bcc Fe*. [Phys. Rev. Lett. **92**, 037204 \(2004\)](#).
- [103] X. Wang, D. Vanderbilt, J. R. Yates *et al.*: *Fermi-surface calculation of the anomalous Hall conductivity*. [Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **76** \(2007\)](#).
- [104] R. Mathieu, A. Asamitsu, H. Yamada *et al.*: *Scaling of the anomalous Hall effect in $Sr_{1-x}Ca_xRuO_3$* . [Phys. Rev. Lett. **93**, 016602 \(2004\)](#).
- [105] T. Miyasato, N. Abe, T. Fujii *et al.*: *Crossover Behavior of the Anomalous Hall Effect and Anomalous Nernst Effect in Itinerant Ferromagnets*. [Phys. Rev. Lett. **99**, 086602 \(2007\)](#).
- [106] S. H. Chun, Y. S. Kim, H. K. Choi *et al.*: *Interplay between Carrier and Impurity Concentrations in Annealed $Ga_{1-x}Mn_xAs$: Intrinsic Anomalous Hall Effect*. [Phys. Rev. Lett. **98**, 026601 \(2007\)](#).
- [107] T. Fukumura, H. Toyosaki, K. Ueno *et al.*: *A Scaling Relation of Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic Semiconductors and Metals*. [Jpn. J. Appl. Phys. **46**, L642 \(2007\)](#).
- [108] D. Chiba, A. Werpachowska, M. Endo *et al.*: *Anomalous Hall Effect in Field-Effect Structures of $(Ga,Mn)As$* . [Phys. Rev. Lett. **104**, 106601 \(2010\)](#).
- [109] M. Glunk, J. Daeubler, W. Schoch *et al.*: *Scaling relation of the anomalous Hall effect in $(Ga,Mn)As$* . [Phys. Rev. B **80**, 1 \(2009\)](#).
- [110] H. Toyosaki, T. Fukumura, Y. Yamada *et al.*: *Anomalous Hall effect governed by electron doping in a room-temperature transparent ferromagnetic semiconductor*. [Nat. Mater. **3**, 221 \(2004\)](#).
- [111] S. Sangiao, L. Morellon, G. Simon *et al.*: *Anomalous Hall effect in Fe (001) epitaxial thin films over a wide range in conductivity*. [Phys. Rev. B **79**, 014431 \(2009\)](#).
- [112] J. S. Y. Feng, R. D. Pashley, und M. A. Nicolet: *Magnetoelectric properties of magnetite thin films*. [J. Phys. C **8**, 1010 \(1975\)](#).
- [113] S. Onoda, N. Sugimoto, und N. Nagaosa: *Theory of Non-Equilibrium States Driven by Constant Electromagnetic Fields: Non-Commutative Quantum Mechanics in the Keldysh Formalism*. [Prog. Theor. Phys. **116**, 61 \(2006\)](#).

- [114] A. a. Kovalev, Y. Tserkovnyak, K. Výborný *et al.*: *Transport theory for disordered multiple-band systems: Anomalous Hall effect and anisotropic magnetoresistance*. [Phys. Rev. B](#) **79**, 195129 (2009).
- [115] A. Burkov und L. Balents: *Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic Semiconductors in the Hopping Transport Regime*. [Phys. Rev. Lett.](#) **91**, 3 (2003).
- [116] T. Holstein: *Hall Effect in Impurity Conduction*. [Phys. Rev.](#) **124**, 1329 (1961).
- [117] X.-J. Liu, X. Liu, und J. Sinova: *Scaling of the anomalous Hall effect in the insulating regime*. [Phys. Rev. B](#) **84**, 1 (2011).
- [118] Y. Tian, L. Ye, und X. Jin: *Proper Scaling of the Anomalous Hall Effect*. [Phys. Rev. Lett.](#) **103**, 1 (2009).
- [119] A. Shitade und N. Nagaosa: *Anomalous Hall Effect in Ferromagnetic Metals: Role of Phonons at Finite Temperature*. [J. Phys. Soc. Japan](#) **81**, 083704 (2012).
- [120] I. Vurgaftman, J. R. Meyer, und L. R. Ram-Mohan: *Band parameters for III-V compound semiconductors and their alloys*. [J. Appl. Phys.](#) **89**, 5815 (2001).
- [121] J. Loher: *Two-dimensional hole systems in indium-based quantum well heterostructures*. Dissertation, Universität Regensburg (2015).
- [122] T. Kuech (Hg.): *Handbook of Crystal Growth*. [Elsevier, Amsterdam](#) (2015).
- [123] U. Wurstbauer, M. Soda, R. Jakiela *et al.*: *Coexistence of ferromagnetism and quantum Hall effect in Mn modulation-doped two-dimensional hole systems*. [J. Cryst. Growth](#) **311**, 2160 (2009).
- [124] A. Baca und C. Ashby (Hg.): *Fabrication of GaAs Devices*. Institution of Engineering & Technology, London (2005).
- [125] V. Rideout: *A review of the theory and technology for ohmic contacts to group III-V compound semiconductors*. [Solid. State. Electron.](#) **18**, 541 (1975).
- [126] T. Takamasu, Y. Oikawa, G. Kido *et al.*: *Nonlinear transport properties of samples with inner current contacts in quantum Hall regime*. [Phys. B Condens. Matter](#) **256-258**, 78 (1998).
- [127] S. Weishäupl: *Quanteninterferenzeffekte in topologischen Isolatoren und magnetischen Halbleitern*. Dissertation, [Universität Regensburg](#) (2015).
- [128] D. Vogel: *Magnetotransport in Mn-dotierten zweidimensionalen Lochsystemen*. Diplomarbeit, Universität Regensburg (2010).
- [129] M. Ritala: *High- κ Gate Dielectrics*. Institute of Physics Publishing (2004).
- [130] R. Endres: *Gate-Last-Prozessintegration und elektrische Bewertung von High- κ -Dielektrika und Metall-Elektroden in MOS-Bauelementen*. Dissertation, [TU Darmstadt](#) (2011).
- [131] M. König: *Optimierung der Al_2O_3 -Isolatorschicht auf InAs:Mn* . Bachelorarbeit, Universität Regensburg (2012).

- [132] Ch. Enss und S. Hunklinger: *Low-Temperature Physics*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (2005).
- [133] N. H. Balshaw: *Practical Cryogenics*. Oxford Instruments Superconductivity Limited (1996).
- [134] G. S. Ohm: *Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen*. *Ann. der Phys. und Chemie* **82**, 459 (1826).
- [135] Stanford Research Systems. *About Lock-In Amplifiers, Application Note #3*. Abgerufen am 05.05.2015. <http://www.thinksrs.com/downloads/PDFs/ApplicationNotes/AboutLIAs.pdf>
- [136] G. Heyne: *Elektronische Meßtechnik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München (1999).
- [137] D. Neumaier: *Schwache Lokalisierung und andere Interferenzeffekte in Ferromagneten*. Dissertation, Universität Regensburg (2009).
- [138] *Lab::Measurement - Measurement control with Perl*. <http://www.labmeasurement.de/>
- [139] N. Mott und W. Twose: *The theory of impurity conduction*. *Adv. Phys.* **10**, 107 (1961).
- [140] A. Yildiz, N. Serin, T. Serin *et al.*: *Crossover from Nearest-Neighbor Hopping Conduction to Efros-Shklovskii Variable-Range Hopping Conduction in Hydrogenated Amorphous Silicon Films*. *Jpn. J. Appl. Phys.* **48**, 111203 (2009).
- [141] M. Levinshstein, S. Rumyantsev, und M. Shur (Hg.): *Handbook Series on Semiconductor Parameters, Vol. 1*. World Scientific, London (1996).
- [142] N. F. Mott: *Electronic Properties in Non-Crystalline Materials*. Clarendon Press, Oxford (1971).
- [143] A. G. Zabrodskii und K. N. Zinov: *Low-temperature conductivity and metal-insulator transition in compensate n-Ge*. *Sov. Phys. JETP* **59**, 425 (1984).
- [144] D. ter Haar (Hg.): *Collected Papers of L. D. Landau*. Pergamon Press, Oxford (1965).
- [145] N. V. Volkenshtein, V. P. Dyakina, und V. E. Startsev: *Scattering mechanisms of conduction electrons in transition metals at low temperatures*. *Phys. Status Solidi* **57**, 9 (1973).
- [146] B. Shklovskii und A. L. Efros: *Electronic Properties of Doped Semiconductors*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo (1984).
- [147] C. J. Adkins: *Conduction in granular metals-variable-range hopping in a Coulomb gap?*. *J. Phys. Condens. Matter* **1**, 1253 (1989).
- [148] B. Abeles, P. Sheng, M. Coutts *et al.*: *Structural and electrical properties of granular metal films*. *Adv. Phys.* **24**, 407 (1975).

- [149] S. Geißler: *Transportuntersuchungen an ferromagnetischen (Ga,Mn)As-Nanokontakten*. Dissertation, [Universität Regensburg](#) (2013).
- [150] D. Yu, C. Wang, B. L. Wehrenberg *et al.*: *Variable Range Hopping Conduction in Semiconductor Nanocrystal Solids*. [Phys. Rev. Lett.](#) **92**, 216802 (2004).
- [151] D. Joung und S. I. Khondaker: *Efros-Shklovskii variable-range hopping in reduced graphene oxide sheets of varying carbon sp^2 fraction*. [Phys. Rev. B](#) **86**, 235423 (2012).
- [152] F. W. Van Keuls, X. L. Hu, H. W. Jiang *et al.*: *Screening of the Coulomb interaction in two-dimensional variable-range hopping*. [Phys. Rev. B](#) **56**, 1161 (1997).
- [153] F. W. Van Keuls, H. Mathur, H. W. Jiang *et al.*: *Localization scaling relation in two dimensions: Comparison with experiment*. [Phys. Rev. B](#) **56**, 13263 (1997).
- [154] A. I. Yakimov, A. V. Dvurechenskii, V. V. Kirienko *et al.*: *Long-range Coulomb interaction in arrays of self-assembled quantum dots*. [Phys. Rev. B](#) **61**, 10868 (2000).
- [155] Y. Zhang, O. Dai, M. Levy *et al.*: *Probing the Coulomb Gap in Insulating n -Type CdSe*. [Phys. Rev. Lett.](#) **64**, 2687 (1990).
- [156] A. Aharony, Y. Zhang, und M. P. Sarachik: *Universal crossover in variable range hopping with Coulomb interactions*. [Phys. Rev. Lett.](#) **68**, 3900 (1992).
- [157] A. Bedoya-Pinto, J. Malindretos, M. Roever *et al.*: *Variable range hopping transport in ferromagnetic GaGdN epitaxial layers*. [Phys. Rev. B](#) **80**, 195208 (2009).
- [158] R. Rosenbaum: *Crossover from Mott to Efros-Shklovskii variable-range-hopping conductivity in In_xO_y films*. [Phys. Rev. B](#) **44**, 3599 (1991).
- [159] Nguyen Van Lien: *Crossovers in two-dimensional variable range hopping*. [Phys. Lett. A](#) **207**, 379 (1995).
- [160] I. Terry, T. Penney, S. von Molnár *et al.*: *Low-temperature transport properties of $Cd_{0.91}Mn_{0.09}Te:In$ and evidence for a magnetic hard gap in the density of states*. [Phys. Rev. Lett.](#) **69**, 1800 (1992).
- [161] T. G. Castner: *Hopping Transport in Solids*. Elsevier/North-Holland, Amsterdam (1990).
- [162] H. F. Hess, K. DeConde, T. F. Rosenbaum *et al.*: *Giant dielectric constants at the approach to the insulator-metal transition*. [Phys. Rev. B](#) **25**, 5578 (1982).
- [163] H. Maier: *Transport in kurzperiodigen lateralen Übergittern*. Masterarbeit, Universität Regensburg (2014).
- [164] F. Matsukura, H. Ohno, A. Shen *et al.*: *Transport properties and origin of ferromagnetism in (Ga,Mn)As*. [Phys. Rev. B](#) **57**, R2037 (1998).

- [165] H. Munekata, A. Zaslavsky, P. Fumagalli *et al.*: *Preparation of (In,Mn)As/(Ga,Al)Sb magnetic semiconductor heterostructures and their ferromagnetic characteristics.* *Appl. Phys. Lett.* **63**, 2929 (1993).
- [166] Q. Xu, L. Hartmann, H. Schmidt *et al.*: *Metal-insulator transition in Co-doped ZnO: Magnetotransport properties.* *Phys. Rev. B* **73**, 205342 (2006).
- [167] T. Dietl: *Diluted Magnetic Semiconductors.* *World Scientific, Singapore* (1991).
- [168] X. Hong, S.-H. Cheng, C. Herding *et al.*: *Colossal negative magnetoresistance in dilute fluorinated graphene.* *Phys. Rev. B* **83**, 085410 (2011).
- [169] A. Oiwa, S. Katsumoto, A. Endo *et al.*: *Giant Negative Magnetoresistance of (Ga,Mn)As/GaAs in the Vicinity of a Metal-Insulator Transition.* *Phys. Status Solidi* **205**, 167 (1998).
- [170] D. Ferrand, J. Cibert, A. Wasiela *et al.*: *Carrier-induced ferromagnetism in p - $Zn_{1-x}Mn_xTe$.* *Phys. Rev. B* **63**, 085201 (2001).
- [171] T. Andrearczyk, J. Jaroszyński, G. Grabecki *et al.*: *Spin-related magnetoresistance of n-type ZnO:Al and $Zn_{1-x}Mn_xO$:Al.* *Phys. Rev. B* **72**, 121309 (2005).
- [172] J. Mycielski: *Impurities in semimagnetic semiconductors.* In *Appl. High Magn. Fields Semicond. Physics, Vol. 177*, 431–440. *Springer Verlag, Berlin/Heidelberg*(1983).
- [173] T. Dietl und H. Ohno: *Dilute ferromagnetic semiconductors: Physics and spintronic structures.* *Rev. Mod. Phys.* **86**, 187 (2014).
- [174] T. Kasuya: *Electrical Resistance of Ferromagnetic Metals.* *Prog. Theor. Phys.* **16**, 58 (1956).
- [175] V. Renard, Z. D. Kvon, G. M. Gusev *et al.*: *Large positive magnetoresistance in a high-mobility two-dimensional electron gas: Interplay of short- and long-range disorder.* *Phys. Rev. B* **70**, 033303 (2004).
- [176] A. Chang und D. Tsui: *Experimental observation of a striking similarity between quantum hall transport coefficients.* *Solid State Commun.* **56**, 153 (1985).
- [177] H. Stormer, K. Baldwin, L. Pfeiffer *et al.*: *Strikingly linear magnetic field dependence of the magnetoresistivity in high quality two-dimensional electron systems.* *Solid State Commun.* **84**, 95 (1992).
- [178] A. F. Ioffe und A. R. Regel: *Progress in Semiconductors Vol. 4.* John Wiley & Sons, London: Heywood (1960).
- [179] T. Jungwirth, J. Wunderlich, V. Novák *et al.*: *Spin-dependent phenomena and device concepts explored in (Ga,Mn)As.* *Rev. Mod. Phys.* **86**, 855 (2014).
- [180] R. Haug, R. Gerhardts, K. Klitzing *et al.*: *Effect of repulsive and attractive scattering centers on the magnetotransport properties of a two-dimensional electron gas.* *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1349 (1987).

- [181] C. Zeng, Y. Yao, Q. Niu *et al.*: *Linear Magnetization Dependence of the Intrinsic Anomalous Hall Effect*. [Phys. Rev. Lett. **96**, 037204 \(2006\)](#).
- [182] J. Kötztler und W. Gil: *Anomalous Hall resistivity of cobalt films: Evidence for the intrinsic spin-orbit effect*. [Phys. Rev. B **72**, 060412 \(2005\)](#).
- [183] L. Ye, Y. Tian, X. Jin *et al.*: *Temperature dependence of the intrinsic anomalous Hall effect in nickel*. [Phys. Rev. B **85**, 220403 \(2012\)](#).
- [184] S. a. Yang, H. Pan, Y. Yao *et al.*: *Scattering universality classes of side jump in the anomalous Hall effect*. [Phys. Rev. B **83**, 125122 \(2011\)](#).
- [185] T. Nunner, G. Zaránd, und F. von Oppen: *Anomalous Hall Effect in a Two Dimensional Electron Gas with Magnetic Impurities*. [Phys. Rev. Lett. **100**, 1 \(2008\)](#).
- [186] A. Werpachowska und T. Dietl: *Effect of inversion asymmetry on the intrinsic anomalous Hall effect in ferromagnetic (Ga,Mn)As*. [Phys. Rev. B **81**, 155205 \(2010\)](#).
- [187] G. Mihály, M. Csontos, S. Bordács *et al.*: *Anomalous Hall Effect in the (In,Mn)Sb Dilute Magnetic Semiconductor*. [Phys. Rev. Lett. **100**, 1 \(2008\)](#).
- [188] T. Jungwirth, J. Sinova, K. Y. Wang *et al.*: *Dc-transport properties of ferromagnetic (Ga,Mn)As semiconductors*. [Appl. Phys. Lett. **83**, 320 \(2003\)](#).
- [189] J. Schliemann (2011). Persönliche Kommunikation.
- [190] K. Nilsson, A. Zakharova, I. Lapushkin *et al.*: *Cyclotron masses and g-factors of hybridized electron-hole states in InAs/GaSb quantum wells*. [Phys. Rev. B **74**, 075308 \(2006\)](#).
- [191] W. Sheng: *G-factor tuning in self-assembled quantum dots*. [Appl. Phys. Lett. **96**, 133102 \(2010\)](#).
- [192] M. J. Snelling, E. Blackwood, C. J. McDonagh *et al.*: *Exciton, heavy-hole, and electron g factors in type-I GaAs/Al_xGa_{1-x}As*. [Phys. Rev. B **45**, 3922 \(1992\)](#).

Vielen Dank

Die vorliegende Arbeit wurde erst durch die Unterstützung und Hilfe möglich, die mir von vielen Seiten entgegengebracht worden ist. Dafür möchte ich mich bei allen aus tiefstem Herzen bedanken.

Herrn Prof. Dr. Dieter Weiss möchte ich meinen herzlichen Dank für seine Betreuung und sein stetiges Interesse an der Arbeit aussprechen. Ich möchte mich ganz besonders für die zahlreichen Diskussionen, Ratschläge und gemeinsamen „Verschleiß“ einiger Theoretiker bei der Ergründung des anomalen Hall-Effektes bedanken. Durch seine Unterstützung hatte ich zudem die Möglichkeit an vielen interessanten Konferenzen und Workshops teilzunehmen.

Josef Loher, Dr. Ursula Wurstbauer und Dr. Dieter Schuh bin ich für das Wachstum und die unkomplizierte Versorgung mit InAs:Mn dankbar. Ohne die Unterstützung von Josef und Ursula wären diese Untersuchungen nicht möglich gewesen. Dabei möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Dominique Bougeard für seine Unterstützung und die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Für wertvolle Diskussionen möchte ich mich bei Prof. Dr. Naoto Nagaosa, Prof. Dr. Jairo Sinova, Prof. Dr. Klaus Richter, Prof. Dr. John Schliemann, Prof. Dr. Xiaofeng Jin, Dr. Paul Wenk, Dr. Stefan Geissler und Christian Butschkow bedanken.

Bei meiner Diplomandin Christina Wensauer möchte ich mich für ihre maßgebliche Unterstützung bei der Erforschung des anomalen Hall-Effektes bedanken. Ebenso bedanke ich mich bei meinem Bachelor-Studenten Matthias König für die Mitarbeit bei der Verbesserung der Isolator-Schicht.

Mein besonderer Dank gilt Alexei Iankilevitch, Hubert Maier und Johannes Ziegler für das standhafte Korrigieren meiner wahllos eingestreuten Kommata und sonstiger Verbrechen an der Grammatik. Sie haben mir geholfen meine Gedankengänge zu entwirren und diese Arbeit lesbar zu machen.

Für jegliche Unterstützung bei technischen Fragen und Problemen im Reinraum möchte ich mich bei Michael Weigl, Uli Gürster, Thomas Haller, Florian Birkner und Cornelia Linz bedanken. Michael Weigl möchte ich noch besonders für die Konstruktion und Aufbau des neuen He³-Probenstabes danken.

Bei Dr. Andreas K. Hüttel, Stefan Geissler, Christian Butschkow und Alois Dirnacher möchte ich mich für die Entwicklung und Verbesserung des Lab::Measurement-Projekts bedanken, die mir eine „konsequente Automatisierung der Datenakquise“ ermöglichte. Dabei haben Christian Butschkow und Stefan Geissler nicht nur „DietersCrazyTempSweep“ ersonnen, wodurch es mir möglich war die Abkühlkurven in

einer ungeahnten Effizienz aufzunehmen, sondern standen mir jederzeit, der fehlenden Benutzeroberfläche statt, zum Konfigurieren meiner Messungen helfend an der Seite. Für beides möchte ich mich aus vollem Herzen bedanken.

Allen Magnetlabor-Betreuern möchte ich für die hingebungsvolle Betreuung der He⁴-Kryostaten und für die vielen Pakete danken. Den „Helium-Boys“ danke ich für besonders flüssiges und kaltes Helium und für ihr stetes Bemühen meine Helium-Moral zu stärken.

Andreas Einwanger, Christian Butschkow und Alexei Iankilevitch möchte ich für ihr Engagement als Systemadministratoren und den hervorragenden IT-Support danken.

Ganz herzlich möchte ich mich bei meinen Leidgenossen Alexei Iankilevitch, Johannes Ziegler und Michael Weigl für ihren Beistand in der „Stunde Null“ des Mischkryostaten danken. Dank ihrer Hilfe konnte das System nach vielen nervenaufreibenden Aktionen wieder in Betrieb genommen werden. Herzlich bedanken möchte ich mich auch für ihre Unterstützung bei der Initiative „Zucht und Ordnung“. Ein Dankeschön auch an **ULTRA** und die Mischerratte.

Bei Claudia Rahm und Elke Haushalter möchte ich mich für ihre Geduld und Hilfe bei allen administrativen Formalitäten bedanken und vor allem dafür, dass ich in ihrem Büro immer Zerstreuung und eine herzliche Atmosphäre gefunden habe.

Ich danke allen Insassen der Bürogemeinschaft 8.1.25/26 für den abwechslungsreichen Büroalltag. Gemeinsam konnten wir durch intensives Alignment-Training unsere Fähigkeiten am Topcon ausbauen und jeden Tag den „Held der Arbeit“ feiern.

Ich danke allen, die mit mir Japan bereist haben für die gemeinsame Zeit – domo arigatou.

Beim gesamten Lehrstuhl möchte ich mich für die unvergessliche Zeit und die herzliche Aufnahme bedanken.

Ein spezieller Dank geht an die „Rakete“. Danke für K&K, für sinnlose Diskussionen, für Raketenausflüge, für Abendaktivitäten, für mehr sinnlose Diskussionen, fürs Feiern, fürs Motzen, für Emoji-Amokläufe, für spezielle Bilder, für Freundschaft und für vieles mehr.

Dankbar bin ich meinen Eltern für ihre bedingungslose Unterstützung. Sie haben mich geprägt und zu dem gemacht was ich heute bin. Ohne sie hätte ich es nicht bis hierher geschafft.

Nicht zuletzt möchte ich Kathrin Magerl für unzählige Dinge danken: Für die Zeit in und außerhalb der Universität, für das unermüdliche Korrekturlesen, fürs Zuhören, für die Rücksicht, Unterstützung und vor allem Geduld in den letzten Monaten und für alles wofür ein „Danke“ zu wenig ist.